ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko–gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
5. ožujka 1994. godine

8. razred

1. Duljina stranice romba $ABCD$ iznosi $a = 4$, a kut uz vrh A je 60°. Kolike su duljine dijagonala e i f tog romba ?

2. Riješi jednadžbu: $3(x + 4)(x + 3) - (x - 6)(x + 1) = 24x + 54$.

3. Ako je znamenka jedinica broja $n^2 + 2n$ (n je prirodni broj) jednaka 4 , onda je znamenka desetica tog broja 2 . Dokaži.

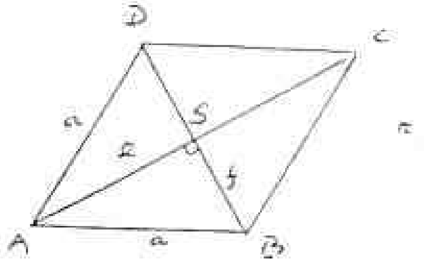
4. Iz mjesta A krenuo je autobus u mjesto B brzinom od 40 km na sat. Nakon 15 minuta vožnje autobus se susreo s automobilom koji se kretao iz mjesta B u mjesto A brzinom od 50 km na sat. Nakon susreta oba vozila su nastavila vožnju , svaki u svoje mjesto. Kada je automobil stigao u mjesto A , odmorio se 15 minuta i nastavio vožnju natrag u mjesto B , pa je tako 20 km od mjesta B sustigao autobus.
Kolika je udaljenost mjesta A i mjesta B ?

5. U trokutu ABC simetrala kuta $\measuredangle BAC$ presjeca stranicu $\overline{BC}$ u točki D . Na stranici $\overline{AC}$ odabrana je točka E , tako da je $\measuredangle EDC = \measuredangle BAC$,
Dokaži da je $|BD| = |DE|$.

 OPĆ /94

50

1.



Neka je $|AC| = e$, $|BD| = f$ i točka S sjecište dijagonala e i f . Trokut ABD je očito jednakostraničan, pa je $f = a = 4$. Kako su dijagonale romba okomite i međusobno se raspolavljaju, znači da je $|AS| = \frac{e}{2}$ visina jednakostraničnog trokuta ABD , tj. $\frac{e}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, pa je $e = 4\sqrt{3}$. 10

2. Zadanu jednadžbu možemo pisati redom ,

$$3(x + 4)(x + 3) - (x - 6)(x + 1) = 24x + 54 \quad ,$$
$$3(x^2 + 7x + 12) - (x^2 - 5x - 6) = 24x + 54 \quad ,$$
$$3x^2 + 21x + 36 - x^2 + 5x + 6 = 24x + 54 \quad , \text{ ili}$$
$$x^2 + x - 6 = 0 \quad ,$$
$$x^2 + 3x - 2x - 6 = 0 \quad ,$$
$$x(x + 3) - 2(x + 3) = 0 \quad ,$$
$$(x + 3)(x - 2) = 0 \quad .$$

Iz $x + 3 = 0$ proizlazi $x_1 = -3$, a iz $x - 2 = 0$, $x_2 = 2$. 10

3. Kako je znamenka jedinica broja $n^2 + 2n$ jednaka 4 , znači da je znamenka jedinica broja $n^2 + 2n + 1$ jednaka 5 . Zbog $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, a to je potpuni kvadrat, proizlazi da su zadnje dvije znamenke broja $(n + 1)^2$ jednake 25 . Prema tome, zadnje dvije znamenke broja $n^2 + 2n$ jesu 24 , a to znači da je znamenka desetica tog broja jednaka 2 . 10

Rješenja za 8. razred

bodovi

4. A C D B

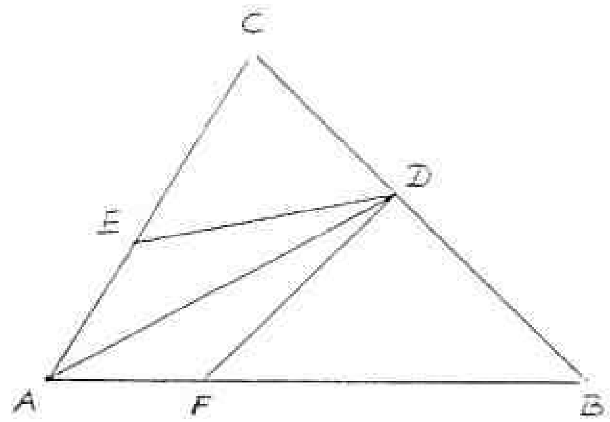
Neka je C mjesto u kojem je autobus susreo automobil, tada je $|AC| = 10$ km . Neka je D mjesto u kojem je automobil sustigao autobus, tada je $|BD| = 20$ km . Neka je $|CD| = x$ km .

Put od C do D autobus je prešao za $\frac{x}{40}$ sati . Put od C do A i od A do D , tj. $(10 + 10 + x)$ km automobil je prešao za vrijeme $\frac{x + 20}{50} + \frac{1}{4}$ sati, a to je jednako vremenu autobusa od C do D . Zato vrijedi jednadžba $\frac{x + 20}{50} + \frac{1}{4} = \frac{x}{40}$.

Rješenje jednadžbe je $x = 130$.

Prema tome, udaljenost mjesta A i mjesta B je $10 + 130 + 20$, tj. 160 km . 10

5.



Na stranici $\overline{AB}$ odaberemo točku F tako da je $|AF| = |AE|$. Lagano se pokaže da je $\triangle AFD \cong \triangle AED$, jer je

1. $|AF| = |AE|$,
2. $\measuredangle FAD = \measuredangle EAD$,
3. $\overline{AD}$ je zajednička stranica .

Zbog jednakosti homolognih elemenata u dva sukladna trokuta proizlazi da je $|FD| = |ED|$, ali i $\measuredangle AFD = \measuredangle AED$, pa je nužno i $\measuredangle BFD = \measuredangle CED$, jer su to njihovi pridruženi sukuti. Kako trokut ABC i trokut CED imaju po 2 jednaka kuta, nužno je i treći kut jednak tj. $\measuredangle ABC = \measuredangle CED$, a to znači da je $\measuredangle BFD = \measuredangle ABC$ iz čega proizlazi da je trokut BFD jednakokračan, tj. $|FD| = |BD|$, a zbog $|FD| = |ED|$ nužno je i $|ED| = |BD|$ što je i trebalo dokazati . 10