ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika

osnovnih škola Republike Hrvatske

18. travnja 1994. godine

8. RAZRED

1. Što je veće: $\sqrt{1993 \cdot 1995}$ ili 1994 ?

2. Neka su x i y pozitivni cijeli brojevi. Ako y postotaka broja y iznosi y, a x postotaka broja $5x$ iznosi $\frac{x}{5}$, koliko posto broja x iznosi broj y ?

3. Odredi sve parove cijelih brojeva x i y za koje vrijedi

$$x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

4. Zadan je trokut ABC tako da težište T leži na kružnici konstruiranoj nad stranicom $\overline{AB}$ kao nad promjerom. Izračunaj površinu trokuta ABC ako je $|AB| = 4$ cm i $\angle TAB = 30°$.

5. U jednakokračnom trokutu ABC točka M je polovište osnovice $\overline{AB}$. Neka je točka N na kraku $\overline{BC}$ takva da je $MN \perp BC$ i neka je točka S polovište dužine $\overline{MN}$. Dokaži da je $AN \perp CS$.

PO 20X

ŽUPANIJSKO 1994.

ZAG. ŽUPANIJE

Rješenja za 8. razred

MAKSIMALNI BROJ BODOVA U SVAKOM ZADATKU JE 10.

1. Izraz pod korjenom napišemo kao razliku kvadrata:

$$\sqrt{1993 \cdot 1995} = \sqrt{(1994-1)(1994+1)} = \sqrt{1994^2 - 1} < \sqrt{1994^2} = 1994.$$

Dakle, 1994 je veći broj.

2. Iz uvjeta zadatka dobivamo slijedeće izraze:

$$\frac{y}{100} \cdot y = y \text{ i } \frac{x}{100} \cdot 5x = \frac{x}{5}.$$

x i y su pozitivni brojevi , pa gornje jednadžbe možemo podijeliti s y, odnosno s x i dobivamo

$$\frac{y}{100} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{x}{100} \cdot 5 = \frac{x}{5}.$$

Dakle, $x = 4$ i $y = 100$ i y je 2500% broja x.

3.

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Budući da tražimo cjelobrojna rješenja, dobivamo ($x - 1 = 0$ i $y = \pm 1$) ili ($x - 1 = \pm 1$ i $y = 0$). Dakle, postoje 4 rješenja i to su : $x = 1$ *i* $y = 1$; $x = 1$ *i* $y = -1$; $x = 2$ *i* $y = 0$; $x = 0$ *i* $y = 0$.

4. Kut $\angle ATB$ je pravi (Talesov poučak, slika 1.), pa je $\angle ABT = 60°$, tj. pravokutni trokut ATB ima kutove 30° i 60°, pa se može nadopuniti do jednakostraničnog trokuta sa stranicom $a = 4$. No, tada je $|TB| = \frac{a}{2} = 2$ cm. , $|TP| = |BP|$ (jer je P središte kružnice) pa je trokut TPB jednakokračan s kutom 60° uz osnovicu $\overline{TB}$. Odatle slijedi: $\angle PTB = 60°$, $\angle TPB = 60°$, tj. trokut PCD ima kuteve 30°, 60° i 90°. Uz to, duljina $|CP| = 6$ cm (težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1), pa opet nadopunom do jednakostraničnog trokuta dobivamo: $|CD| = \frac{|CP|\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm.

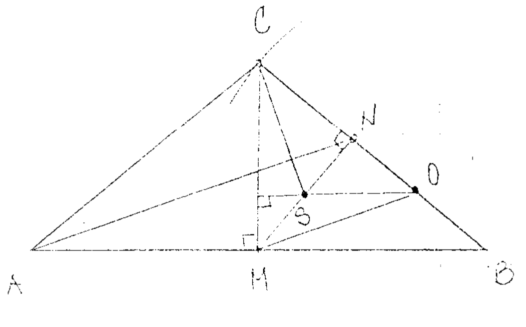
$$P_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |CD|}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

ŽUPANIJSKO, 1994.

ZAG. ŽUPANIJA

Rješenja za 8. razred

5. Neka je O polovište dužine $\overline{NB}$ (slika 2.). Drugim riječima, $\overline{SO}$ je srednjica trokuta MNB, pa je SO paralelno s AB i okomito na MC (jer je $MC \perp AB$). Dakle, u trokutu CMO visine su $\overline{OS}$ i $\overline{MN}$, a ortocentar je S. Tada i treća visina mora prolaziti kroz S, pa zaključujemo da treća visina trokuta CMO leži na CS, tj. $CS \perp MO$.
U trokutu ANB $\overline{MO}$ je srednjica, pa iz $MO \parallel AN$ i $CS \perp MO$ zaključujemo da je $CS \perp AN$.



slika 2.