ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika

osnovnih škola Republike Hrvatske

9. travnja 1994. godine

8. razred

1. Poznati engleski matematičar Augustus De Morgan živio je u prošlom stoljeću. Jednom je rekao: " Bio sam x godina star godine x^2 ." Kada je rođen ?

2. Duljine stranica pravokutnog trokuta prirodni su brojevi. Odredi opseg onog pravokutnog trokuta koji ima najmanju duljinu hipotenuze, ako je duljina katete 21 .

3. Odredi tri uzastopna neparna prirodna broja kojima je zbroj kvadrata jednak četveroznamenkastom broju s jednakim znamenkama.

4. Zadan je četverokut $ABCD$, tako da je $|AB| + |AD| = 10$ cm , $|BC| = |CD|$ i $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 90^\circ$.

   Kolika je površina četverokuta $ABCD$?

5. Dan je pravokutnik $ABCD$, pri čemu je $|AB| > |BC|$. Simetrala kuta kod vrha B siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki E , a pravac AD u točki F . Točkom E nacrtan je pravac paralelan sa stranicom $\overline{AB}$ koji siječe dijagonalu $\overline{BD}$ u točki M .

   Dokaži da je $FM \perp AC$.

ŽUPANIJSKO

R j e š e n j a za 8. razred 94 bodovi

AH

1. Neka je y godina rođenja A. De Morgana. Kako je De Morgan rođen u 19. stoljeću to očito vrijedi $y = x^2 - x$, pa je $x^2 = \overline{18ab}$, pri čemu je x prirodni broj. Jedini prirodni broj x čiji je kvadrat četveroznamenkasti broj koji počinje sa 18 jeste 43, jer je $x^2 = 43^2 = 1849$. Zato je $y = 1849 - 43 = 1806$. A. De Morgan je rođen 1806. godine. 10

2. Neka su a i b duljine kateta i c duljina hipotenuze i neka je $a = 21$. Tada vrijedi $c^2 - b^2 = 21^2$, odnosno $(c - b)(c + b) = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$, pri čemu je $c - b < c + b$.

Riješimo sad ove sustave jednadžbi:

$$\begin{array}{c} c - b = 1 \\ \underline{c + b = 441} \\ c = 221 \end{array} \qquad \begin{array}{c} c - b = 3 \\ \underline{c + b = 147} \\ c = 75 \end{array} \qquad \begin{array}{c} c - b = 7 \\ \underline{c + b = 63} \\ c = 35 \end{array} \qquad \begin{array}{c} c - b = 9 \\ \underline{c + b = 49} \\ c = 29 \end{array}$$

Prema tome, najmanja duljina hipotenuze 29, a opseg trokuta 70. 10

3. Neka su $x - 2$, x, $x + 2$ tri uzastopna neparna prirodna broja. Tada vrijedi $(x - 2)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = \overline{aaaa}$, pri čemu je a znamenka četveroznamenkastog broja. Nakon kvadriranja dobivamo

$x^2 - 4x + 4 + x^2 + x^2 + 4x + 4 = \overline{aaaa}$, odnosno $3x^2 + 8 = \overline{aaaa}$.

Kako je x neparan broj, lagano se pokaže da je $3x^2 + 8$ isto neparan broj, a to znači da je $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Pribrojnik $3x^2$ je očito djeljiv sa 3, a pribrojnik 8 nije, pa je nužno $a \neq 3$ i $a \neq 9$. Zato je $a \in \{1, 5, 7\}$, pa razlikujemo ove slučajeve:

1^o. Za $a = 1$ dobivamo $3x^2 + 8 = 1111$, odnosno $3x^2 = 1103$, pa x nije prirodni broj.

2^o. Za $a = 5$ bit će $3x^2 + 8 = 5555$, odnosno $x^2 = 1849$, tj. $x = 43$.

3^o. Za $a = 7$ imamo $3x^2 + 8 = 7777$, odnosno $3x^2 = 7769$, pa x nije prirodni broj.

Prema tome, traženi brojevi su 41, 43, 45. 10

bodovi

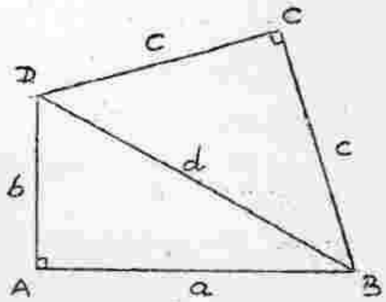
4. Neka je $|AB| = a$, $|BC| = |CD| = c$ $|AD| = b$, $|BD| = d$ i $P(ABCD) = P$

Tada vrijedi $P(ABD) + P(BCD) = P$, ili $P = \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$.

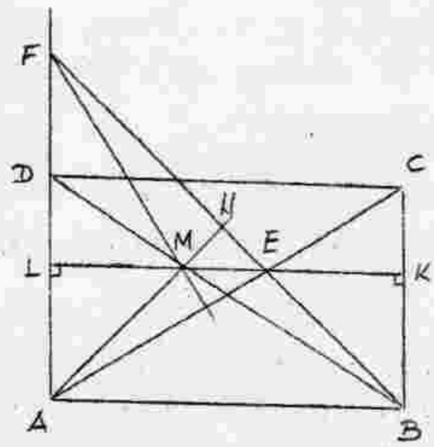
Primjenom Pitagorina poučka na trokut BCD, odnosno ABD dobivamo $d^2 = 2c^2$, odnosno $d^2 = a^2 + b^2$. Izjednačavanjem desnih strana imamo $2c^2 = a^2 + b^2$ ili $\frac{c^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{4}$, pa zamjenom u jednakost za površinu dobivamo $P = \frac{ab}{2} + \frac{a^2 + b^2}{4}$, odnosno

$P = \frac{2ab + a^2 + b^2}{4}$, $P = \frac{(a + b)^2}{4}$ ili $P = \frac{10^2}{4}$, tj. $P = 25$.

$P(ABCD) = 25\ cm^2$. 10



5.



Neka je točka N presjek pravca AM i pravca BF i neka su točke K i L presjek pravca EM sa stranicom $\overline{BC}$ odnosno $\overline{AD}$.

Lagano se pokaže da je $\triangle AEL \cong \triangle BKM$, jer je $|AL| = |BK|$, $\measuredangle ALE = \measuredangle BKM = 90^\circ$ i $\measuredangle LAE = \measuredangle MBK$, pa je $|AE| = |BM|$.

Sad treba pokazati da vrijedi $\triangle ABM \cong \triangle ABE$.

Naime, $\overline{AB}$ je zajednička stranica, $|BM| = |AE|$ i $\measuredangle ABM = \measuredangle BAE$ iz čega proizlazi da je $\measuredangle ABE = \measuredangle BAM = 45^\circ$, a to znači da je $\measuredangle ANB = 90^\circ$.

Kako je $EL \perp AF$ zaključujemo da je točka M ortocentar trokuta AEF, pa je nužno $FM \perp AE$, tj. $FM \perp AC$, a to je i trebalo dokazati. 10