ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske
Crikvenica, 12. - 15. svibnja 1994.

I. razred

1. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe
$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4}$.

2. Neka su a i b duljine osnovica trapeza. Dokažite:

   (a) Duljina dužine paralelne s osnovicama, koja raspolavlja površinu trapeza, jednaka je $\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$ (kvadratna sredina).

   (b) Duljina spojnice polovišta krakova jednaka je $\frac{a+c}{2}$ (aritmetička sredina).

   (c) Duljina dužine paralene osnovicama, koja dijeli trapez na dva međusobno slična trapeza, jednaka je $\sqrt{ac}$ (geometrijska sredina).

   (d) Duljina dužine paralelne s osnovicama kroz sjecište dijagonala, kojoj su krajevi na krakovima, jednaka je $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$ (harmonijska sredina).

3. Riješite sustav jednadžbi

$$2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0$$
$$2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2x_{1993} - 5x_{1994} + 3x_1 = 0$$
$$2x_{1994} - 5x_1 + 3x_2 = 0.$$

4. Pokažite da za svaka dva pozitivna broja p i q vrijedi nejednakost
$(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geq 9pq$.

Rješenja zadataka za 1. razred:

1. Jednadžbu zapišemo u ekvivalentnom obliku

$$n(4n + 4m - 3mn) = 4, \qquad (1)$$

pri čemu mora biti $n \neq 0$ i $m \neq 0$.

Kako $n|4$ postoje samo ove mogućnosti $n = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Promotrimo ovih šest mogućnosti:

(a) Za $n = 1$ je $m = 0$.

(b) Za $n = -1$ je $m = 0$.

(c) Za $n = 2$ je $m = 3$.

(d) Za $n = -2$ je $m = \frac{3}{5}$.

(e) Za $n = 4$ je $m = \frac{15}{8}$.

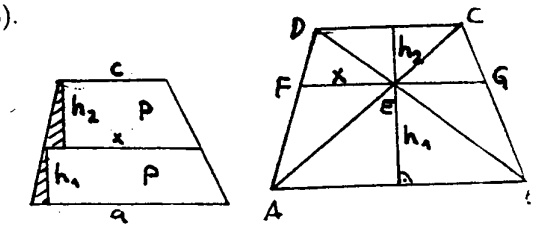
(f) Za $n = -4$ je $m = \frac{15}{16}$.

Jedino rješenje koje zadovoljava sve uvjete je $(n, m) = (2, 3)$.

2. (a) Iz jednakosti površina manjih trapeza dobiva se $\frac{a+x}{2}h_1 = \frac{c+x}{2}h_2$.

Iz sličnosti osjenčanih trokuta slijedi $\frac{x-c}{2} : h_2 = \frac{a-x}{2} : h_1$.

Iz ovih dviju jednadžbi se dobiva $x = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$.



(b) Zbog sukladnosti manjih trokuta kao pod (a) dobiva se $x - c = a - x$, tj. $x = \frac{a+c}{2}$.

(c) Zbog sličnosti ova dva trapeza je $a : x = x : c$, tj. $x = \sqrt{ac}$.

(d) Iz sličnosti trokuta ADC i AFE, te ABD i FED dobiva se

$\frac{x}{2} : c = h_1 : (h_1 + h_2)$

$\frac{x}{2} : a = h_2 : (h_1 + h_2)$.

Iz ovih jednakosti dobije se $x = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$.

3. Odmah uočavamo jedno rješenje: $x_1 = x_2 = \ldots = x_{1994} = t$, gdje je t bilo koji realan broj. Pokazat ćemo da je to i jedino rješenje. Ako bi bilo npr. $x_2 > x_1$ onda bi bilo $x_3 = \frac{5x_2-2x_1}{3} > x_2, x_4 = \frac{5x_3-2x_2}{3} > x_3, \ldots, x_1 = \frac{5x_{1994}-2x_{1993}}{3} > x_{1994}$. Tada bi morale biti zadovoljene ove nejednakosti $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots < x_{1994} < x_1$ što ne može biti.

Analogno se pokazuje da ne može biti ni $x_2 < x_1$.

Zato je navedeno rješenje i jedino.

4. Lijevu stranu nejednakosti zapišemo u obliku

$\frac{(p^2+p+1)(q^2+q+1)}{pq} = (p + \frac{1}{p} + 1)(q + \frac{1}{q} + 1)$.

Kako je za $x > 0$ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ dobivamo da je lijeva strana ≥ 9, čime je nejednakost dokazana.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Crikvenica, 12. – 15. svibnja 1994.

II. razred

1. Odredite sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi
$|z^2+1| = 2|z|$ i $|z-3i| = \sqrt{10}$.

2. Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kvadratna funkcija $f(x) = ax^2+bx+c$. Označimo sa D diskriminantu, sa P umnožak, a sa S zbroj njezinih nultočaka. Pokažite da postoji samo jedna funkcija f za koju su a, D, P, S četiri uzastopna cijela broja (u rastućem poretku).

3. Odredite šiljaste kutove pravokutnog trokuta kojemu se polumjeri opisane i upisane kružnice odnose kao $5:2$.

4. Riješite jednadžbu
$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 - \log_4(x+6)^3$.

Rješenja zadataka za 2. razred:

1. Stavimo $z = x + yi, x, y \in \mathbf{R}$. Tada je $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, pa iz prve jednadžbe dobivamo
$(x^2 - y^2 + 1)^2 + (2xy)^2 = 4(x^2 + y^2)$ (1)
dok druga jednadžba daje
$x^2 + (y - 3)^2 = 10.$ (2)
Ako iz (2) izrazimo x^2 i to uvrstimo u (1), dobivamo
$(2 + 6y - 2y^2)^2 + 4y^2(1 + 6y - y^2) = 4(1 + 6y)$, odnosno
$4 + 36y^2 + 4y^4 + 24y - 8y^2 - 24y^3 + 4y^2 + 24y^3 - 4y^4 = 4 + 24y.$
Odavde je $32y^2 = 0$, tj. $y = 0$.
Sada iz (2) imamo: $x^2 = 1$, tj. $x = \pm 1$.
Dakle rješenja su $z_1 = 1$ i $z_2 = -1$.

2. Neka je $D = a + 1, P = \frac{c}{a} = a + 2, S = -\frac{b}{a} = a + 3$. Odavde je $c = a(a + 2)$,
$b = -a(a + 3)$, pa iz
$D = b^2 - 4ac = a + 1$, slijedi
$a^4 + 2a^3 + a^2 - a = 1.$
Zato je $a \in \{\pm 1\}$. Uvrštavanjem dobivamo da je jedino rješenje $a = -1$. Sada je $b = 2, c = -1$, te je $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

3. $\frac{2}{5} = \frac{\rho}{r} = \frac{\frac{P}{s}}{\frac{c}{2}} = \frac{\frac{\frac{ab}{a+b+c}}{\frac{c}{2}}}{\frac{c}{2}} = \frac{\frac{c\sin\alpha \cdot c\cos\alpha}{c\sin\alpha + c\cos\alpha + c}}{\frac{c}{2}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}.$
Dakle: $5\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha + 1$.
Stavimo: $x = \sin\alpha, y = \cos\alpha$. Dobivamo sustav:
$5xy = x + y + 1$
$x^2 + y^2 = 1.$
Neka je $x + y = u, xy = v$. Sada imamo $5v = u + 1$ i $u^2 - 2v = 1$.
Iz prve jednadžbe je $u = 5v - 1$, pa uvrštavanjem u drugu slijedi: $25v^2 - 12v = 0$, odakle je $v_1 = 0, u_1 = -1; v_2 = \frac{12}{25}, u_2 = \frac{7}{5}$.
Prvo rješenje otpada budući da je $u = \sin\alpha + \cos\alpha > 0$. Dakle, imamo sustav
$x + y = \frac{7}{5}$ i $xy = \frac{12}{25}$,
čija su rješenja $x_1 = \frac{3}{5}, y_1 = \frac{4}{5}; x_2 = \frac{4}{5}, y_2 = \frac{3}{5}$.
Prema tome, $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \sin\beta = \frac{4}{5}$ ili $\sin\alpha = \frac{4}{5}, \sin\beta = \frac{3}{5}$.
Dakle, šiljsti kutovi danog trokuta su $\arcsin\frac{3}{5} \approx 36^0 52'$ i
$\arcsin\frac{4}{5} \approx 53^0 8'$.

4. Da bi jednadžba imala smisla, mora biti: $x \neq -2, 4 - x > 0, x + 6 > 0$, odnosno $x \in (-6, -2) \cup (-2, 4)$.
Uz ovaj uvjet jednadžba je ekvivalentna sa
$3\log_{\frac{1}{4}}|x + 2| - 3 = 3\log_{\frac{1}{4}}(4 - x) + 3\log_{\frac{1}{4}}(x + 6)$, odnosno
$\log_{\frac{1}{4}}\frac{|x+2|}{(4-x)(x+6)} = 1.$
Odavde je $4|x + 2| = (4 - x)(x + 6)$.
Ako je $x \in (-6, -2)$ dobivamo: $-4(x + 2) = (4 - x)(x + 6) \quad \Rightarrow$
$x^2 - 2x - 32 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 - \sqrt{33}.$
Ako je $x \in (-2, 4)$ dobivamo: $4(x + 2) = (4 - x)(x + 6) \quad \Rightarrow$
$x^2 + 6x - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2.$

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Crikvenica, 12. – 15. svibnja 1994.

III. razred

1. Na hipotenuzi $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC izabrana je točka P tako da je $|PA| = m, |PB| = n, |PC| = d$. Pokažite da je
   $a^2m^2 + b^2n^2 = c^2d^2$,
   gdje je $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$.

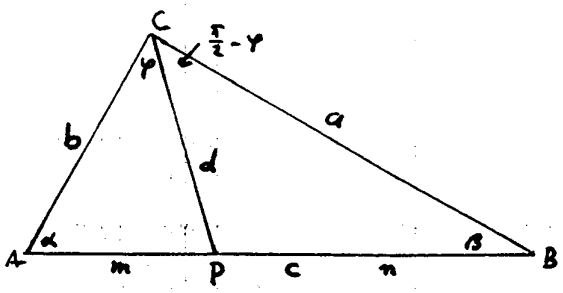
2. Riješite jednadžbu
   $2\cos(\frac{\pi}{2}(1+x)) = \frac{1}{x^2} + x^2$.

3. Volumen kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jednak je V. Nađite volumen zajedničkog dijela tetraedara AB_1CD_1 i A_1BC_1D.

4. U ravnini je dano pet točaka P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sa cjelobrojnim koordinatama. Pokažite da postoji bar jedan par (P_i, P_j) za $i \neq j$ tako da pravac P_iP_j sadrži neku točku Q sa cjelobrojnim koordinatama koja leži između P_i i P_j.

Rješenja zadataka za 3. razred:

1. .



Primjenom sinusovog poučka na trokute APC i PBC dobivamo

$\frac{m}{d} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ i $\frac{n}{d} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)}{\sin\beta} = \frac{\cos\varphi}{\sin\beta}$, tj.

$\frac{am}{d} = \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\varphi = c\sin\varphi$ i $\frac{bn}{d} = \frac{b}{\sin\beta}\cdot\cos\varphi = c\cos\varphi$,

odakle je

$(\frac{am}{d})^2 + (\frac{bn}{d})^2 = c^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = c^2$, tj. $a^2m^2 + b^2n^2 = c^2d^2$.

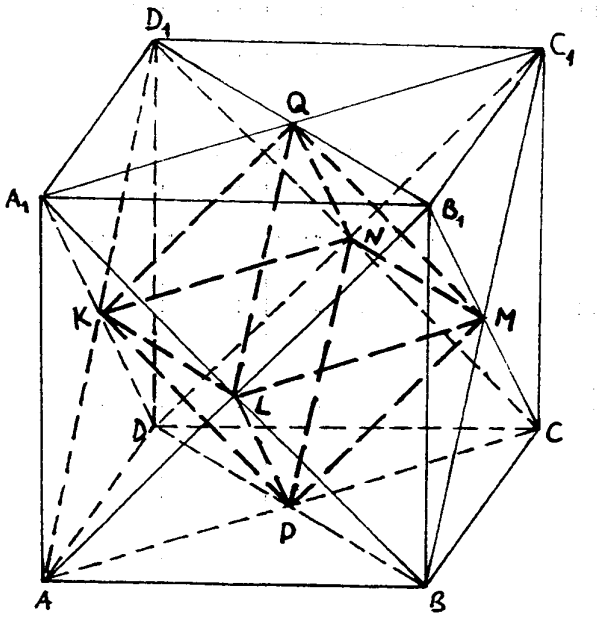
2. Budući da je $2\cos(\frac{\pi}{2}(1+x)) \leq 2$ i

$\frac{1}{x^2} + x^2 = (\frac{1}{x} - x)^2 + 2 \geq 2$, mora vrijediti $\frac{1}{x^2} + x^2 = 2$, odnosno $\frac{1}{x} - x = 0$, tj. $x = 1$ ili $x = -1$.

Za $x = 1$ imamo $2\cos(\frac{\pi}{2}(1+x)) = -2$, a za $x = -1$ je

$2\cos(\frac{\pi}{2}(1+x)) = 2$. Dakle jedino rješenje je $x = -1$.

3. .



Presjek tih tetraedara je dvostruka četverostrana piramida $PKLMNQ$ čiji vrhovi su sjecišta dijagonala strana kocke. Npr. brid $\overline{AB_1}$ tetraedra AB_1CD_1 siječe brid $\overline{A_1B}$ tetraedra A_1BC_1D u točki L itd.

Volumen V_1 piramide je

$V_1 = (\frac{1}{3}\cdot S_{KLMN}\cdot\frac{a}{2})\cdot 2 = (\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}2\cdot\frac{a}{2})\cdot 2 = \frac{1}{6}V$.

4. Naka su dane točke $P_i(x_i, y_i), i = 1,2,3,4,5$. Podijelimo ove točke u četiri grupe. Za $\alpha, \beta \in \{0,1\}$ u grupu (α,β) stavimo točke (x_i, y_i) tako da je $x_i \equiv \alpha, y_i \equiv \beta (\mathrm{mod}\ 2)$. Svaki par je ekvivalentan jednom od parova $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$. Kako imamo pet točaka, po Dirichletovom principu postoje barem dvije točke P_i, P_j takve da je $x_i \equiv x_j, y_i \equiv y_j (\mathrm{mod}\ 2)$. Tada polovište P dužine $\overline{P_iP_j}$, $P(\frac{1}{2}(x_i+x_j), \frac{1}{2}(y_i+y_j))$, ima cjelobrojne koordinate jer su $x_i + x_j$ i $y_i + y_j$ parni brojevi.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Crikvenica, 12. – 15. svibnja 1994.

IV. razred

1. Ako je jedan član beskonačnog aritmetičkog niza u skupu prirodnih brojeva potpuni kvadrat, dokažite da takvih članova ima beskonačno mnogo.

2. Neka je z kompleksan broj i $w = f(z) = \frac{2}{3-z}$.

   (a) Odredite skup $\{w : z = 2 + iy, y \in \mathbf{R}\}$ u kompleksnoj ravnini.

   (b) Pokažite da se funkcija w može zapisati u obliku $\frac{w-1}{w-2} = \lambda \frac{z-1}{z-2}$.

   (c) Neka je $z_0 = \frac{1}{2}$ i niz (z_n) definiran sa
   $z_n = \frac{2}{3-z_{n-1}}, \quad n \geq 1.$
   Koristeći svojstvo (b) izračunajte limes niza (z_n).

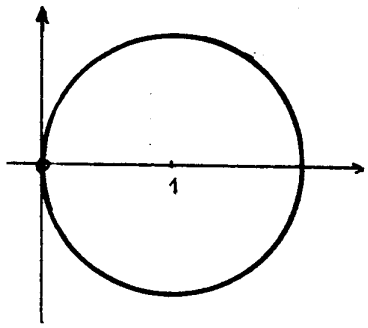
3. Odredite polinom $P(x)$ s realnim koeficijentima takav da za neki $n \in \mathbf{N}$. vrijedi
   $xP(x-n) = (x-1)P(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$

4. U ravnini je dano pet točaka P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sa cjelobrojnim koordinatama. Pokažite da postoji bar jedan par (P_i, P_j) za $i \neq j$ tako da pravac P_iP_j sadrži neku točku Q sa cjelobrojnim koordinatama koja leži između P_i i P_j.

Rješenja zadataka za 4. razred:

1. Neka je $x_n = x_0 + nd = p^2, p \in \mathbf{Z}$. Nađimo x_m tako da bude
$x_m = x_0 + md = q^2, q \in \mathbf{Z}$. Oduzimanjem ovih jednakosti dobivamo $(m-n)d = (q+p)(q-p)$.
Neka je $m - n = q + p, d = q - p$ tj. $q = p + d, m = q + p + n = n + 2p + d$. Sada dobivamo
$x_m = x_0 + md = x_0 + nd + 2pd + d^2 = p^2 + 2pd + d^2 = (p+d)^2$.
Sada se vidi da je za $m_1 = m + 2(p+d) + d = n + 4p + 4d, \quad x_{m_1} = (p+2d)^2$.
Nadalje, vidi se da je za $m_k = n + 2pk + k^2 d, \quad x_{m_k} = (p + kd)^2$.

2. (a) $w = \frac{2}{3-z} = \frac{2}{1-iy} = \frac{2}{1+y^2} + i\frac{2y}{1+y^2}$.
$w - 1 = \frac{1-y^2}{1+y^2} + i\frac{2y}{1+y^2}$.
$|w-1|^2 = (\frac{1-y^2}{1+y^2}) + (\frac{2y}{1+y^2})^2 = 1$.
Ovaj skup točaka je kružnica sa središtem u točki $(1,0)$ polumjera 1 koja ne sadrži točku $(0,0)$.



(b) $\frac{w-1}{w-2} = \frac{\frac{2}{3-z}-1}{\frac{2}{3-z}-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z-1}{z-2}$.

(c) Vrijedi $\frac{z_1-1}{z_1-2} = \frac{1}{2}\frac{z_0-1}{z_0-2}$ i zatim
$\frac{z_2-1}{z_2-2} = (\frac{1}{2})^2 \frac{z_0-1}{z_0-2}$.
Odavde se iteracijama dobije
$\frac{z_n-1}{z_n-2} = (\frac{1}{2})^n \frac{z_0-1}{z_0-2} = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^n$.
Odavde se odmah vidi da je $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

3. (a) Ako je polinom $P(x) \equiv 0$ tada svaki $n \in \mathbf{N}$ ima traženo svojstvo.
Promatrajmo sada opći slučaj kada polinom nije identički jednak nuli.

(b) $n = 0$ ne zadovoljava jer iz $xP(x) = (x-1)P(x)$ za $\forall x \in \mathbf{R}$ slijedi $P(x) \equiv 0$.

(c) Neka je $n > 1$ i k stupanj polinoma. Uvrstimo u danu relaciju $x = 0, n, 2n, \ldots, kn$ redom dobivamo:
$0 \cdot P(-n) = -1 \cdot P(0) \quad \Rightarrow \quad P(0) = 0$
$n \cdot P(0) = (n-1)P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n) = 0$
$\vdots$
$kn \cdot P((k-1)n) = (kn-1)P(kn) \quad \Rightarrow \quad P(kn) = 0.$
Polinom $P(x)$ ima $k+1$ nultočku pa je zato $P(x) \equiv 0$. Zato ne postoje takvi polinomi stupnja $n > 1$.

(d) Za $n = 1$ je $xP(x-1) = (x-1)P(x)$. Zato je polinom $P(x)$ djeljiv sa x pa je $P(x) = xQ(x)$ i
$x \cdot (x-1)Q(x-1) = (x-1) \cdot x \cdot Q(x) \quad \Rightarrow \quad Q(x) = a, \quad a \in \mathbf{R}$ i $P(x) = ax(x-1)$.

4. Vidi rješenje zadatka 4. za treći razred.