ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko–gradsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

5. ožujka 1994. godine

I. razred

1. Jedna zagrebačka obitelj krenut će ove godine na ljetovanje na Jadran posljednjeg dana u mjesecu. Umnožak rednog broja dana polaska i rednog broja mjeseca povratka s brojem djece u obitelji te brojem dana ljetovanja je 14384. Odredite datum povratka.

2. Rastavite na faktore izraz

$$(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3.$$

3. Visina i težišnica iz vrha A trokuta ABC dijele kut α na tri jednaka dijela. Odredite kutove tog trokuta.

4. Riješite sustav jednadžbi

$$x_1+a_2x_2=x_2+a_3x_3=x_3+a_4x_4=x_4+a_5x_5=x_5+a_1x_1=1,$$

gdje je $a_1a_2a_3a_4a_5\neq-1$.

Rješenja za prvi razred

1. Broj 14384 rastavi se na faktore: $14384 = 16 \cdot 899 = 16 \cdot (900 - 1) =$ $16 \cdot (30^2 - 1^2) = 2^4 \cdot 31 \cdot 29$ 5 bodova

31 - redni broj dana polaska (posljednji dan u mjesecu)

8 - redni broj mjeseca povratka (može biti jedino 8. mjesec) 5 bodova

2 - broj djece 5 bodova

29 - broj dana ljetovanja 5 bodova

Dakle, vraćaju se 28.8. 5 bodova

2. $(b-c)(b+c)^3 + (c-a)(c+a)^3 + (a-b)(a+b)^3 =$

$= (b^2-c^2)(b+c)^2 + (c^2-a^2)(c+a)^2 + (a^2-b^2)(a+b)^2 =$

$= b^4 + 2b^3c - 2bc^3 - c^4 + c^4 + 2c^3a - 2ca^3 - a^4 + a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4 =$

$= 2[bc(b^2-c^2) + a(c^3-b^3) + a^3(b-c)] =$

$= 2(b-c)[bc(b+c) - a(c^2+cb+b^2) + a^3] =$ 10 bodova

$= 2(b-c)[bc(b+c) - a(b+c)^2 + abc + a^3] =$

$= 2(b-c)[bc(b+c+a) - a((b+c)^2 - a^2)] =$

$= 2(b-c)[bc(b+c+a) - a(b+c-a)(b+c+a)] =$

$= 2(b-c)(b+c+a)(bc - ab - ac + a^2) =$ 10 bodova

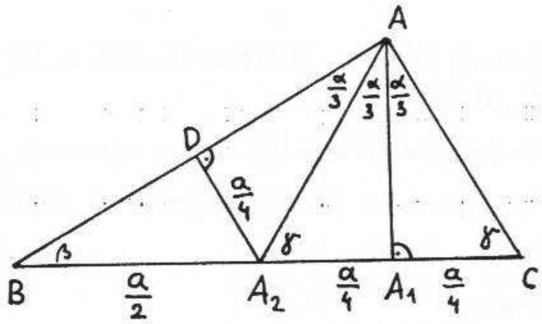
$= 2(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c).$ 5 bodova

3. Neka je A_1 nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$, i $\overline{AA_2}$ težišnica iz vrha A. Tada je

$d(A_1, A_2) = d(A_1, C)$ i $\angle AA_2A_1 = \gamma$. 5 bodova

Iz A_2 povucimo okomicu A_2D na $\overline{AB}$. Tada je $\triangle AA_2D \cong \triangle AA_2A_1$.

U trokutu $\triangle BA_2D$ je $d(B, A_2) = \frac{a}{2}, d(D, A_2) = \frac{a}{4}$ i $\angle A_2DB = 90^o$. Odavde slijedi $\beta = 30^o$. 10 bodova



Iz $\triangle AA_1C$ imamo $\gamma = 90^o - \frac{\alpha}{3}$, a iz $\triangle ABA_2$, $\quad \gamma = \frac{\alpha}{3} + \beta$.
Odavde se dobiva $\alpha = 90^o$ i $\gamma = 60^o$. 10 bodova

4. Imamo ovaj sistem jednadžbi

$$x_1 + a_2 x_2 = 1$$
$$x_2 + a_3 x_3 = 1$$
$$x_3 + a_4 x_4 = 1$$
$$x_4 + a_5 x_5 = 1$$
$$x_5 + a_1 x_1 = 1$$
5 bodova

Pomnožimo li ove jednadžbe redom sa $1, -a_2, a_2a_3, -a_2a_3a_4, a_2a_3a_4a_5$ i zbrojimo, dobivamo jednadžbu

$$x_1(1 + a_1a_2a_3a_4a_5) = 1 - a_2 + a_2a_3 - a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5$$
15 bodova

Zbog $a_1a_2a_3a_4a_5 + 1 \neq 0$ imamo

$$x_1 = \frac{1-a_2+a_2a_3-a_2a_3a_4+a_2a_3a_4a_5}{1+a_1a_2a_3a_4a_5}$$

i dalje ciklički

$$x_2 = \frac{1-a_3+a_3a_4-a_3a_4a_5+a_3a_4a_5a_1}{1+a_1a_2a_3a_4a_5},$$
$$x_3 = \frac{1-a_4+a_4a_5-a_4a_5a_1+a_4a_5a_1a_2}{1+a_1a_2a_3a_4a_5},$$
$$x_4 = \frac{1-a_5+a_5a_1-a_5a_1a_2+a_5a_1a_2a_3}{1+a_1a_2a_3a_4a_5},$$
$$x_5 = \frac{1-a_1+a_1a_2-a_1a_2a_3+a_1a_2a_3a_4}{1+a_1a_2a_3a_4a_5}.$$
5 bodova

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko–gradsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

5. ožujka 1994.godine

II. razred

1. Zadan je trokut ABC. Neka je B_1 točka na visini tog trokuta povučenoj iz vrha B takva da je $\angle AB_1C = 90^o$, a C_1 točka na visini tog trokuta povučenoj iz vrha C takva da je $\angle AC_1B = 90^o$. Dokažite da je $|AB_1| = |AC_1|$.

2. U skupu kompleksnih brojeva nađite rješenje sustava jednadžbi:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|$$
$$z_1 + z_2 + z_3 = 1$$
$$z_1 z_2 z_3 = 1.$$

3. Nađite sve parove kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

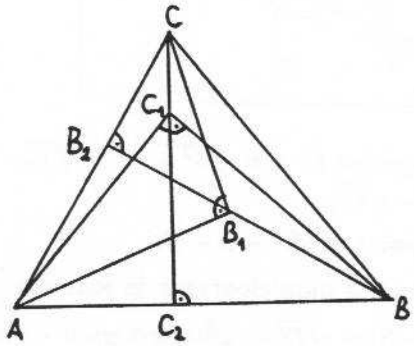
$$(1+x+y)(1+x^2+y^2)+xy(1+xy)-x^3-y^3=0.$$

4. Riješite nejednadžbu

$$\frac{1}{2^{2x}+3} \geq \frac{1}{2^{x+2}-1}.$$

Rješenja zadataka za drugi razred

1. Neka su B_2 i C_2 nožišta visina povučenih iz B i C.



Slika 1 bod

Iz sličnosti trokuta AB_1C i AB_2B_1 slijedi $\frac{|AB_1|}{|AC|} = \frac{|AB_2|}{|AB_1|}$;

iz sličnosti trokuta ABB_2 i ACC_2 slijedi $\frac{|AB_2|}{|AB|} = \frac{|AC_2|}{|AC|}$;

i napokon iz sličnosti trokuta AC_1B i AC_2C_1 dobiva se $\frac{|AC_1|}{|AB|} = \frac{|AC_2|}{AC_1|}$.

9 bodova

Iz ove tri jednakosti dobijemo

$$|AB_1|^2 = |AB_2||AC| = |AC_2||AB| = |AC_1|^2$$

tj. $|AB_1| = |AC_1|$. 15 bodova

2. Neka su z_1, z_2, z_3 rješenja tog sustava. Promatrajmo polinom

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3.$$

5 bodova

Zbog drugog i trećeg uvjeta je

$$P(z) = z^3 - z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - 1.$$

5 bodova

Iz tri dana uvjeta slijedi

$$1 = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} =$$

$$\frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3}{z_1z_2z_3} = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$$

pa je $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$. 10 bodova

Kompleksni brojevi z_1, z_2 i z_3 su korijeni tog polinoma i to su

$z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -i.$ 5 bodova

3. Nakon množenja dobivamo

$1 + x + y + x^2 + x^3 + yx^2 + y^2 + xy^2 + y^3 + xy + x^2y^2 - x^3 - y^3 = 0,$

. 2 boda

a nakon sređivanja

$1 + x + x^2 + y + xy + x^2y + y^2 + xy^2 + x^2y^2 = 0$ tj.

$(1 + x + x^2)(1 + y + y^2) = 0.$ 10 bodova

Rješenja jednadžbe $x^2 + x + 1 = 0$ su

$x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ i $x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. 3 boda

Rješenja polazne jednadžbe su

$(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, y), \quad (\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, y), \quad y \in \mathbf{C},$ te

$(x, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}), \quad (x, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}), \quad x \in \mathbf{C},$

za proizvoljne kompleksne brojeve x i y. 10 bodova

4. Lijeva strana nejednadžbe je definirana i pozitivna je za svaki realan broj x, a desna je definirana za svaki broj $x \neq -2$, pri čemu može biti i negativna.

(a) Ako je desna strana negativna tj. ako je $2^{x+2} < 1$, onda je $x < -2$.

. 10 bodova

(b) Ako je $x > -2$, onda je nejednadžba ekvivalentna sa

$2^{2x} + 3 \leq 2^{x+2} - 1$ tj. $2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 \leq 0.$

Uz supstituciju $2^x = t$ nejednadžba poprima oblik

$t^2 - 4t + 4 \leq 0$ tj. $(t-2)^2 \leq 0$

čije je rješenje samo $t = 2$ tj. $x = 1$. 10 bodova

Konačno, rješenje polazne nejednadžbe je

$x \in (-\infty, -2) \cup \{1\}$. 5 bodova

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

5. ožujka 1994. godine

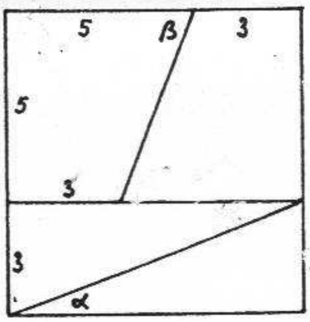
III. razred

1. Riješite nejednadžbu

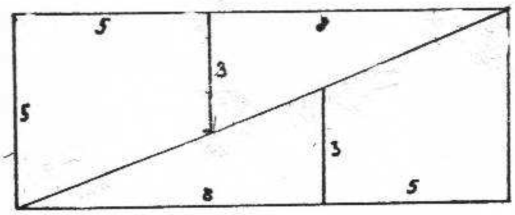
$$\log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1-\frac{x}{4}}.$$

2. Tri kugle diraju se međusobno i diraju ravninu u tri dane točke. Nađite polumjere tih kugala ako su međusobne udaljenosti tih triju točaka a, b i c.

3. Šahovska ploča 8×8 razrezana je na četiri dijela kao na slici 1 od kojih se može složiti pravokutnik 13×5 kao na slici 2. Služeći se kutovima α i β sa slike 1 objasnite dobiveni paradoks $64 = 65$.



Slika 1



slika 2

4. Odredite kutove jednakokračnog trokuta čiji ortocentar leži na njegovoj upisanoj kružnici.

Rješenja za treći razred

1. Nejednadžba ima smisla za $x > 0$ i $1 - \frac{x}{4} > 0$, tj. za $x \in (0,4)$.

   . 5 bodova

   Uz ovaj uvjet je

   $\log_9^2 x - \log_9^2 \sqrt{1-\frac{x}{4}} = \frac{1}{4}\log_3^2 x - \frac{1}{4}\log_3^2(1-\frac{x}{4}) =$

   $\frac{1}{4}[\log_3 x - \log_3(1-\frac{x}{4})]\cdot[\log_3 x + \log_3(1-\frac{x}{4})] = \frac{1}{4}\log_3 \frac{4x}{4-x} \log_3 \frac{x(4-x)}{4}$.

   Dakle, nejednadžba je ekvivalentna sa:

   $\log_3 \frac{4x}{4-x} \log_3 \frac{x(4-x)}{4} \geq 0$. 5 bodova

   Sada imamo dvije mogućnosti:

   1) $\frac{4x}{4-x} \geq 1$ i $\frac{x(4-x)}{4} \geq 1 \Longleftrightarrow x \geq \frac{4}{5}$ i $(x-2)^2 \leq 0 \Longleftrightarrow x = 2$; 5 bodova

   2) $\frac{4x}{4-x} \leq 1$ i $\frac{x(4-x)}{4} \leq 1 \Longleftrightarrow x \leq \frac{4}{5}$ i $(x-2)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, \frac{4}{5}]$

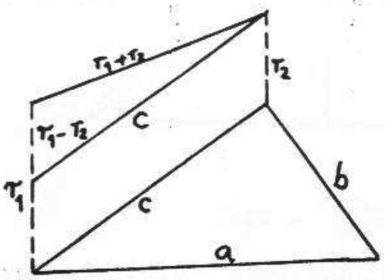
   . 5 bodova

   Iz 1) i 2) i uvjeta $x > 0$ slijedi da je rješenje skup $(0, \frac{4}{5}] \cup \{2\}$. 5 bodova

2. $c^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2$ (*)

   Analogno je $a^2 = (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2 = 4r_2r_3$,

   $b^2 = (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 = 4r_1r_3$. 10 bodova



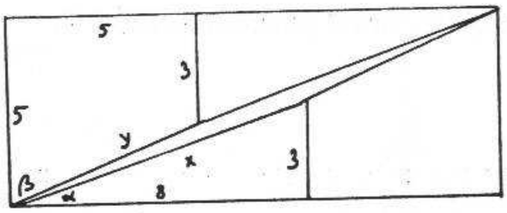
   Množenjem ove tri relacije dobivamo $a^2b^2c^2 = 64r_1^2r_2^2r_3^2$,

   odnosno $abc = 8r_1r_2r_3$. (**) 5 bodova

   Dijeljenjem (**) sa (*) dobivamo $r_3 = \frac{ab}{2c}$, 5 bodova

   i analogno $r_1 = \frac{bc}{2a}, r_2 = \frac{ac}{2b}$. 5 bodova

3. Na slici 2 između četiri dijela nalazi se jedan jako uski paralelogram. 5 bodova



Stranice tog paralelograma su $x = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$,

$y = \sqrt{5^2 + (5-3)^2} = \sqrt{29}$, 5 bodova

a kut između tih stranica je $90^o - \alpha - \beta$. 3 boda

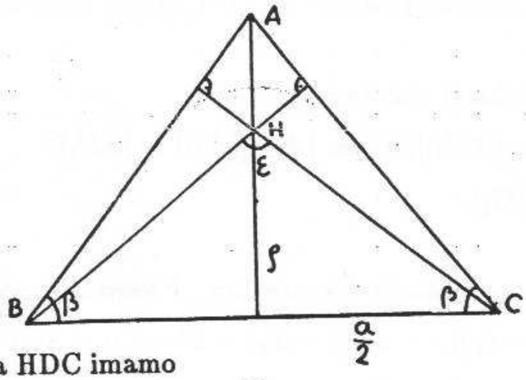
Prema tome, površina tog paralelograma je jednaka

$P = xy\sin(90^o - \alpha - \beta) = \sqrt{73}\cdot\sqrt{29}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$. 4 boda

Sada imamo: $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{73}}, \cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{73}}, \sin\beta = \frac{5}{\sqrt{29}}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{29}}$, 3 boda

pa je $P = \sqrt{73}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{1}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{29}}(8\cdot 2 - 3\cdot 5) = 1$. 5 bodova

4. $\varepsilon = \angle CHB = 180^o - \alpha = 180^o - (180^o - 2\beta) = 2\beta$. 5 bodova



Iz trokuta HDC imamo

$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{a}{2}}{2\rho} = \frac{as}{4P} = \frac{a\cdot\frac{a+2b}{2}}{4\cdot\frac{av}{2}} = \frac{a+2b}{4v}$, 7 bodova

pri čemu je a osnovica zadanog trokuta ABC, b je krak, v visina.

Dalje slijedi: $4v\cdot\operatorname{tg}\beta = a + 2b$,

$$4\cdot\frac{a}{2}\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\beta = a + 2\cdot\frac{a}{2\cos\beta} \qquad /:a$$

$$\frac{2\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{\cos\beta+1}{\cos\beta} \quad \Rightarrow \quad 3\cos^2\beta + \cos\beta - 2 = 0.$$ 8 bodova

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su: $\cos\beta = -1$ i $\cos\beta = \frac{2}{3}$. Prvo ne zadovoljava, pa ostaje $\beta = \arccos\frac{2}{3} \approx 48^o11', \alpha \approx 83^o38'$. 5 bodova

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko–gradsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

5. ožujka 1994.godine

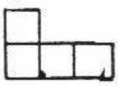
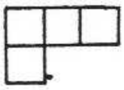
IV. razred

1. U točkama parabole $y^2 = 12x$ s ordinatama $2, 6, -3$ povučene su tangente. Koliki je omjer površina trokuta kojeg tvore te tri točke i trokuta kojeg tvore sjecišta tangenata na parabolu u tim točkama?

2. Ako je $x_1 = 1$ i $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, dokažite da je

$$x_{1994}^2 + x_{1994} < 1.$$

3. Nađite sve strogo rastuće funkcije $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, takve da je $f^{-1} = f$.

4. Može li se ploča 8×8 bez kutnih polja prekriti s 15 pločica oblika  ili  ?

Rješenja - 4. razred!

1. Koordinate točaka prvog trokuta su

   $A(\frac{1}{3}, 2), B(3,6), C(\frac{3}{4}, -3)$. 3 boda

   Jednadžbe tangenata na parabolu u točkama A, B, C su:

   $t_A \dots y = 3x + 1$

   $t_B \dots y = x + 3$

   $t_C \dots y = -2x - \frac{3}{2}$. 6 bodova

   Presjeci tangenata su

   $t_A \cap t_B = T_1(1,4)$

   $t_A \cap t_C = T_2(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

   $t_B \cap t_C = T_3(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. 6 bodova

   Površina trokuta ABC je

   $P_1 = \frac{1}{2}|\frac{1}{3}(6+3) + 3(-3-2) + \frac{3}{4}(2-6)| = \frac{15}{2}$. 4 boda

   Površina trokuta $T_1T_2T_3$ je

   $P_2 = \frac{1}{2}|1 \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}) - \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - 4) - \frac{3}{2}(4 + \frac{1}{2})| = \frac{15}{4}$. 4 boda

   Traženi omjer površina je $\frac{P_1}{P_2} = 2$. 2 boda

2. *Rješenje* **A:**

   Dokažimo metodom matematičke indukcije da vrijedi $x_{2n}^2 + x_{2n} < 1$ za svaki prirodni broj n. 2 boda

   (a) Za $n = 1$ je $x_2 = \frac{1}{2}$ i lako se provjeri da je $x_2^2 + x_2 < 1$. 2 boda

   (b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj k. Tada je

   $x_{2(k+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x_{2k}}} = \frac{x_{2k}+1}{x_{2k}+2}$. 5 bodova

   Sada je

   $x_{2(k+1)}^2 + x_{2(k+1)} = x_{2(k+1)}(x_{2(k+1)} + 1) = \frac{x_{2k}+1}{x_{2k}+2} \cdot \frac{2x_{2k}+3}{x_{2k}+2} =$

   $\frac{x_{2k}^2+5x_{2k}+3}{(x_{2k}+2)^2} = 1 + \frac{x_{2k}^2+x_{2k}-1}{(x_{2k}+2)^2}$. 10 bodova

   Kako je po pretpostavci indukcije $x_{2k}^2 + x_{2k} - 1 < 0$, tada je i $x_{2k+2}^2 + x_{2k+2} < 1$. 5 bodova

   Time je tvrdnja dokazana za svaki prirodan broj n, pa stoga vrijedi i za $n = 997$.

Rješenje **B:**

Dokazat ćemo da za svaki prirodan broj n vrijedi $x_{2n} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i $x_{2n-1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 5 bodova

Označimo sa $f(x) = \frac{1}{1+x}$ funkciju na skupu realnih brojeva.

(i) Ako je $x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ tada je $f(x) > \frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(ii) Ako je $x > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ tada je $f(x) < \frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 13 bodova

Za $n = 1$ je $x_1 = 1 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ pa je u ovom slučaju tvrdnja dokazana. 2 boda

Kako je $x_{2n} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ to je $x_{2n}^2 + x_{2n} < (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{5}-1}{2}) = 1$. Zato tvrdnja vrijedi za svaki n, pa specijalno vrijedi i za $n = 997$. 6 bodova

3. Funkcija f je strogo rastuća pa za svaki x_1, x_2 vrijedi $f(x_1) < f(x_2)$.2 boda

Označimo $y = f(x)$. Tada je zbog uvjeta u zadatku $x = f(y)$. 2 boda

(i) Za $x < y$ je $f(x) < f(y)$, pa slijedi da je $y < x$ što je kontradikcija.
. 10 bodova

(ii) Analogno, za $x > y$ je $f(x) > f(y)$,odnosno $y > x$ što je opet kontradikcija. 5
bodova

Dakle, jedino moguće je da bude $x = y$, odnosno $f(x) = x$. Budući da je x bio proizvoljan, to je jedina funkcija s traženim svojstvima $f(x) = x$ za svaki realan broj x, a to znači da je $f^{-1} = f$. 6 bodova

4. Podijelit ćemo sva polja ploče na dva disjunktna skupa. Obojimo redove 1, 3, 5, 7 crvenom, a redove 2, 4, 6, 8 plavom bojom. 5 bodova

Pločica postavljena na ploču može prekrivati ili 3 crvena i 1 plavo polje, ili 3 plava i 1 crveno polje. 5 bodova

Označimo sa x broj pločica koje prekrivaju 3 crvena i 1 plavo polje. Tada $(15-x)$ pločica prekriva 1 crveno i 3 plava polja. Ukupan broj crvenih polja je 32. Dakle vrijedi

$3x + (15 - x) = 32$ pa je $x = \frac{17}{2}$.

Zato traženo prekrivanje nije moguće. 15 bodova