MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

# MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika osnovnih škola Republike Hrvatske

1. travnja 1995. godine

8. razred

1. (a) Dokaži da za svaki realni broj $y$ vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{5}{2}y^2+y+5\right)^2-\left(\frac{3}{2}y^2-5y-4\right)^2\geq 0 \ .$$

(b) Za koji je realni broj $y$ zadana razlika jednaka nuli?

2. Za koje realne brojeve $x, y, z$ izraz

$$9x^2+4y^2+25z^2-24x+28y+20z+2064$$

ima najmanju vrijednost? Odredi tu vrijednost.

3. Ivana je knjigu koja ima 480 stranica pročitala za nekoliko dana. Ako bi Ivana svakog dana pročitala 16 stranica više, tada bi cijelu knjigu pročitala 5 dana prije.
Za koliko je dana Ivana pročitala knjigu?

4. Opseg pravokutnika je 26 cm, a zbroj površina kvadrata nacrtanih nad svima njegovim stranicama je 194 $\text{cm}^2$. Kolike su duljine stranica $a$ i $b$ tog pravokutnika ?

5. Dan je jednakokračan trokut $ABC$. Na produžetku kraka $\overline{CA}$ preko vrha $A$ istaknuta je točka $D$, a na kraku $\overline{BC}$ točka $E$, tako da je $|AD|=|BE|$.
Dokaži da osnovica $\overline{AB}$ raspolavlja dužinu $\overline{DE}$.

ŽUPANIJSKO

1995.

Rješenja za 8. razred

SVAKI ZADATAK DONOSI 10 BODOVA. UZ NEKE ZADATKE DAN JE PRIJEDLOG RASPODJELE BODOVA. UKOLIKO JE UČENIK RJEŠAVAO ZADATAK NA NEKI DRUGI NAČIN OD OVDJE PREDLOŽENOG, PRIZNAJE MU SE I ODGOVARAJUĆE BODUJE SVAKI ISPRAVAN POSTUPAK.

1. (a) Ako razliku kvadrata na lijevoj strani nejednakosti rastavimo na faktore, dobivamo

$$(y^2+6y+9)(4y^2-4y+1) \geq 0,$$

ili $(y+3)^2(2y-1)^2 \geq 0$. Posljednja nejednakost je točna za svaki realni broj $y$, jer uvijek vrijedi $(y+3)^2 \geq 0$ i $(2y-1)^2 \geq 0$. ........................................8 bodova

(b) Zadana razlika bit će jednaka nuli ako je $y+3=0$, tj. $y=-3$, ili $2y-1=0$, tj. $y=\frac{1}{2}$. ..................2 boda

..................................................Ukupno 10 bodova za 1. zadatak

2. Zadani zbroj možemo pisati redom:

$$9x^2+4y^2+25z^2-24x+28y+20z+2064=$$
$$=(9x^2-24x+16)+(4y^2+28y+49)+(25z^2+20z+4)+2064-16-49-4=$$
$$=(3x-4)^2+(2y+7)^2+(5z+2)^2+1995\ .$$

Kako je $(3x-4)^2 \geq 0, (2y+7)^2 \geq 0$ i $(5z+2)^2 \geq 0$, slijedi da će zadani zbroj imati najmanju moguću vrijednost 1995, ako je $3x-4=0$, $2y+7=0$, i $5z+2=0$, tj. $x=\frac{4}{3}$, $y=-\frac{7}{2}$ $z=-\frac{2}{5}$.

..................................................Ukupno 10 bodova za 2. zadatak

3. Neka je $x$ broj dana za koji je Ivana pročitala knjigu. Tada je $\frac{480}{x}$ prosječan broj stranica koje je Ivana pročitala u jednom danu, a $\frac{480}{x-5}$ prosječan broj dnevno pročitanih stranica knjige da je knjigu pročitala 5 dana prije. Zato vrijedi jednadžba

$$\frac{480}{x}+16=\frac{480}{x-5}\ ,$$

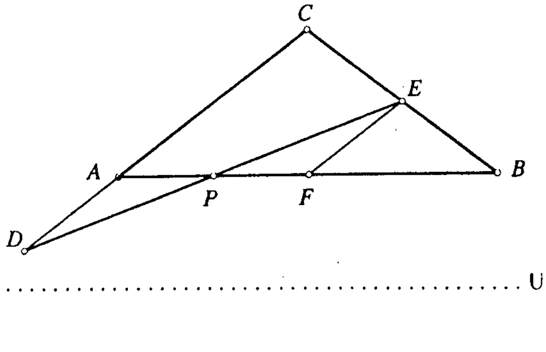
koja nakon sređivanja poprima oblik $x^2-5x-150=0$, odnosno $(x-5)(x+10)=0$. Pozitivno rješenje jednadžbe je $x=15$. Ivana je pročitala knjigu za 15 dana.

..................................................Ukupno 10 bodova za 3. zadatak

4. Neka za duljine stranica $a$ i $b$ pravokutnika vrijedi $a>b$. Iz $2a+2b=26$ slijedi $a+b=13$. Ako zadnju jednakost kvadriramo, dobivamo $a^2+2ab+b^2=169$. Očito je zbroj površina četiri kvadrata jednak $2a^2+2b^2=194$, tj. $a^2+b^2=97$. Zamjenom ove jednakosti u jednakost $a^2+2ab+b^2=169$ proizlazi $2ab=72$. Ako od jednakosti $a^2+b^2=97$ oduzmemo jednakost $2ab=72$, dobivamo $(a-b)^2=25$, tj. $a-b=5$. Vrijednost $a-b=-5$ otpada, jer je $a>b$. Rješenje sustava $a+b=13, a-b=5$ je $a=9, b=4$. Duljine stranica pravokutnika su 9 cm i 4 cm.

..................................................Ukupno 10 bodova za 4. zadatak

5. Neka je točka $P$ presjek stranice $\overline{AB}$ i dužine $\overline{DE}$. Na stranici $\overline{AB}$ odaberemo točku $F$, tako da je $EF \parallel AC$. Trokut $FBE$ je jednakokračan, jer je $\angle CAB=\angle EFB=\angle EBA$, pa je $|BE|=|EF|$, a zbog $|AD|=|BE|$ nužno je $|AD|=|EF|$. Pokažimo da je $\triangle ADP \cong \triangle FEP$. Imamo, $|AD|=|EF|$, $\angle APD=\angle FPD$ (vršni kutovi), $\angle DAP=\angle EFP$ (kutovi uz transverzalu), a to znači da je $|DP|=|EP|$, odnosno točka $P$ je polovište dužine $\overline{DE}$, tj. stranica $\overline{AB}$ raspolavlja dužinu $\overline{DE}$.




..................................................Ukupno 10 bodova za 5. zadatak