MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

1. travnja 1995. godine

I. razred

1. U pravokutnom trokutu ABC točka K je polovište hipotenuze $\overline{AB}$. Točka M je na stranici $\overline{AC}$ tako da je $|AM| = 2|MC|$. Dokažite da je $\angle MBA = \angle MKC$.

2. Brojevi a, b, c su takvi da je

$$\frac{a^2 - bc}{a(1 - bc)} = \frac{b^2 - ac}{b(1 - ac)}, \qquad abc(1 - bc)(1 - ac) \neq 0.$$

Ako je $a \neq b$, dokažite da je

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

3. Odredite sve uređene trojke brojeva (x, y, z) za koje je: $x - y = y - z = 96$, pri čemu su x, y, z kvadrati prirodnih brojeva.

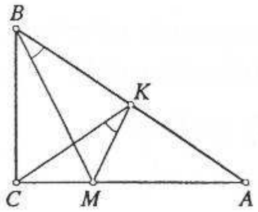
4. Skicirajte skup točaka (x, y) u koordinatnoj ravnini takvih da je

$$y \geq |2|x| + |x - 2||, \qquad y \leq 8.$$

Izračunajte površinu dobivenog geometrijskog lika.

Rješenja zadataka za prvi razred.
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Primijetimo da je $|CK| = \frac{1}{2}|AB| = |AK|$, tj. trokut CAK je jednakokračan. Zato je $\angle KCM = \angle KCA = \angle CAK = \angle MAB$.
(10 bodova)



Iz gornje jednakosti i uvjeta zadatka je
$\frac{|AM|}{|MC|} = 2 = \frac{|AB|}{|CK|}$.
Odavde slijedi da su trokuti AMB i CMK slični, odakle slijedi $\angle MBA = \angle MKC$. (15 bodova)

2. Sređivanjem gornjeg izraza dobivamo

$$b(a^2 - bc)(1 - ac) = a(b^2 - ac)(1 - bc)$$
$$a^2b - ab^2 - a^3bc + ab^3c - b^2c + a^2c + ab^2c^2 - a^2bc^2 = 0$$
$$ab(a - b) - abc(a^2 - b^2) + c(a^2 - b^2) - abc^2(a - b) = 0$$
$$(a - b)(ab - a^2bc - ab^2c + ac + bc - abc^2) = 0 \qquad / : (a - b)$$
$$ab + ac + bc = a^2bc + ab^2c + abc^2 \qquad / : abc$$
$$a + b + c = \tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c}.$$
(25 bodova)

3. Neka je $x = a^2, y = b^2, z = c^2$. Kako je $x > y > z$, to je $a > b > c$.

$a^2 - b^2 = 96 \quad \Rightarrow \quad (a + b)(a - b) = 96$ i
$b^2 - c^2 = 96 \quad \Rightarrow \quad (b + c)(b - c) = 96.$ (5 bodova)

Imamo ove mogućnosti:

$a + b, \quad b + c = 96, \quad 48, \quad 32, \quad 24, \quad 16, \quad 12;$
$a - b, \quad b - c = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 8.$ (5 bodova)

Budući da je $(a + b) + (a - b)$ paran broj, otpadaju prva i treća mogućnost. (5 bodova)

Preostale mogućnosti su

$(a,b), \quad (b,c) = (25,23), \quad (14,10), \quad (11,5), \quad (10,2).$

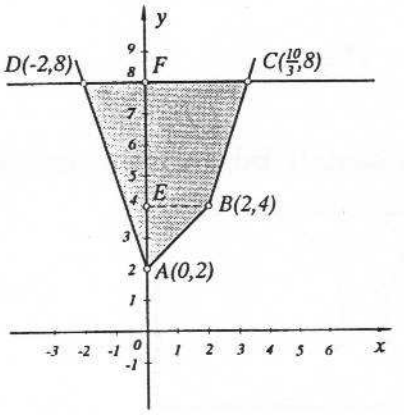
Kako par (a,b) završava elementom kojim (b,c) počinje, može biti samo $a = 14, \quad b = 10, \quad c = 2$. Postoji jedino rješenje $x = 196, \quad y = 100, \quad z = 4$. (10 bodova)

4. Moramo promatrati ova tri slučaja:

$1^\circ \quad x \geq 2; \qquad 2^\circ \quad 0 \leq x \leq 2; \qquad 3^\circ \quad x \leq 0.$

U prvom slučaju je $y \geq 3x - 2$, u drugom $y \geq x + 2$ i u trećem $y \geq -3x + 2$. (10 bodova)

Geometrijski lik koji se dobije je četverokut čiji su vrhovi $A(0,2)$, $B(2,4)$, $C(\frac{10}{3}, 8)$, $D(-2,8)$. (10 bodova)



Površina ovog čeverokuta jednaka je zbroju površine trokuta ABE i AFD te trapeza $EBCF$, gdje je $E(0,4)$ i $F(0,8)$. Dobijemo

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 + \frac{2 + \frac{10}{3}}{2} \cdot 4 = \frac{56}{3}.$$

(5 bodova)

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

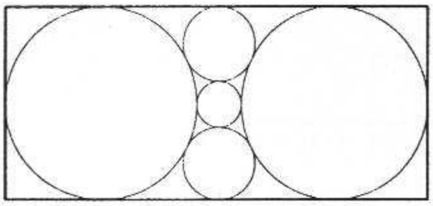
1. travnja 1995. godine

II. razred

1. Odredite sva rješenja jednadžbe u skupu kompleksnih brojeva

$$z^5 = \overline{z}.$$

2. Pet kružnica upisano je u pravokutnik kako je prikazano na slici



Duljina manje stranice pravokutnika jednaka je 1. Kolika je duljina veće stranice?

3. Duljina jedne dijagonale romba je geometrijska sredina duljine stranice i druge dijagonale. Odredite kutove romba.

4. Riješite nejednadžbu

$$\frac{9^x - 5 \cdot 15^x + 4 \cdot 25^x}{-9^x + 8 \cdot 15^x - 15 \cdot 25^x} < 0.$$

Rješenja zadataka za drugi razred.
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Jedno rješenje je $z_\circ = 0$.

   Pomnožimo jednadžbu sa z; $z \neq 0$ i dobijemo

   $z^6 = z\overline{z} = |z|^2$.

   Vrijedi: $|z^5| = |z|^5 = |\overline{z}| = |z| \quad \Rightarrow \quad |z| = 1$.

   Zato je jednadžba ekvivalentna sa

   $$\begin{aligned} z^6 = 1 \quad &\Rightarrow \quad z^6 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad (z^3-1)(z^3+1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (z-1)(z+1)(z^2-z+1)(z^2+z+1) = 0. \end{aligned}$$

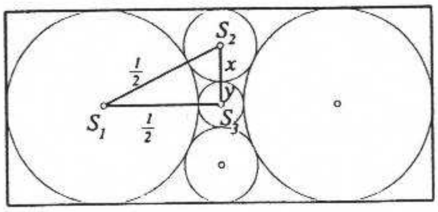
   Ova jednadžba ima još šest rješenja,

   $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, z_4 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, z_5 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, z_6 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

   25 bodova

2. Polumjer najveće kružnice jednak je $\frac{1}{2}$. Neka su polumjeri drugih dviju kružnica jednaki x i y kao na slici. Iz pravokutnog trokuta $S_1S_2S_3$ koristeći Pitagorin poučak dobivamo

   $(\frac{1}{2}+x)^2 = (\frac{1}{2}+y)^2 + (x+y)^2$. 10 bodova



   Nadalje vrijedi još ova jednadžba

   $4x + 2y = 1$. 5 bodova

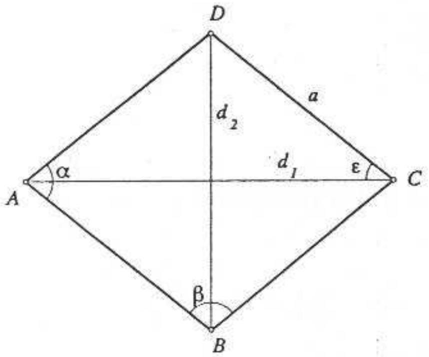
   Odavde se dobije kvadratna jednažba $4y^2 + 8y - 1 = 0$ čije pozitivno rješenje je jednako $y = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$. 5 bodova

   Duljina veće stranice pravokutnika je jednaka $1 + 2y + 1 = \sqrt{5}$.

   5 bodova

3. Označimo $|AC| = d_1$, $|BD| = d_2$. Kako je $d_2 = \sqrt{ad_1}$ to je $d_2^2 = ad_1$. Odavde dobivamo

   $\frac{d_1}{d_2} = \frac{d_2}{a} = k$, tj. $d_2 = ak$, $d_1 = ak^2$. 5 bodova



Kako je
$a^2 = (\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2$, tj.
$a^2 = (\frac{ak^2}{2})^2 + (\frac{ak}{2})^2$ dobivamo jednadžbu
$k^4 + k^2 - 4 = 0$.
Jedino pozitivno rješenje je $k^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)$. 10 bodova
Izračunajmo kut ϵ :

$$\cos \epsilon = \frac{\frac{d_1}{2}}{a} = \frac{k^2}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1) = 0.780\,776.$$

$\epsilon = \arccos \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1)$,
$\alpha = 2\epsilon, \quad \beta = 180° - 2\epsilon$. 10 bodova

4. Nejednažbu zapišimo u obliku

$$\frac{(\frac{3}{5})^{2x} - 5 \cdot (\frac{3}{5})^x + 4}{-(\frac{3}{5})^{2x} + 8 \cdot (\frac{3}{5})^x - 15} < 0.$$

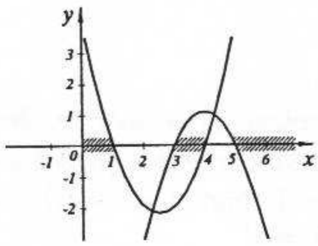
5 bodova

Supstitucijom $(\frac{3}{5})^x = t$ zapišemo jednadžbu u pogodnijem obliku

$$\frac{t^2 - 5t + 4}{-t^2 + 8t - 15} < 0,$$

ili u faktoriziranom obliku

$$\frac{(t-1)(t-4)}{-(t-3)(t-5)} < 0.$$



Rješenje ove nejednažbe je $t \in (0,1) \cup (3,4) \cup (5,\infty)$, odnosno

10 bodova

$x \in (-\infty, \log_{\frac{3}{5}} 5) \cup (\log_{\frac{3}{5}} 4, \log_{\frac{3}{5}} 3) \cup (0,\infty)$. 10 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

1. travnja 1995. godine

III. razred

1. Naći sva rješenja sustava

   (1) $\sin x \cos y = A$

   (2) $\cos x \sin y = B$

   za $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Diskusija!

2. Vrhom uspravnog kružnog stošca prolaze dvije ravnine. Jedna od njih nagnuta je prema bazi stošca pod kutom α i siječe ju duž tetive duljine a. Druga je prema bazi nagnuta pod kutom β, $(\beta \neq \alpha)$ i siječe ju duž tetive duljine b. Odredite obujam stošca.

3. Zadan je trapez s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Dokažite da su krakovi $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ okomiti ako i samo ako je suma kvadrata duljina dijagonala trapeza jednaka sumi kvadrata duljina osnovica.

4. Dan je pravokutni trokut ABC. Točka D je polovište hipotenuze $\overline{AB}$, F je polovište stranice $\overline{AC}$, E je polovište od $\overline{CF}$ i G je polovište od $\overline{FA}$. Dužina $\overline{CD}$ siječe $\overline{BE}$, $\overline{BF}$ i $\overline{BG}$ redom u točkama P, Q i R. Koliki je omjer $\frac{|PQ|}{|QR|}$?

Rješenja zadataka za treći razred.
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Iz (1) i (2) dobivamo $\sin(x+y) = A+B$, i $\sin(x-y) = A-B$, a odavde

$x + y = \arcsin(A + B)$ i $x + y = \pi - \arcsin(A + B)$;

$x - y = \arcsin(A - B)$ i $x - y = \pi - \arcsin(A - B)$. 10 bodova

Sustav ima rješenje ako i samo ako je $A, B, A+B, A-B \in [-1,1]$, tj. $|A| \le 1$, i $B \in [-1+|A|, 1-|A|]$. 5 bodova

Sada dobijemo rješenje u svakom od četiri slučaja:

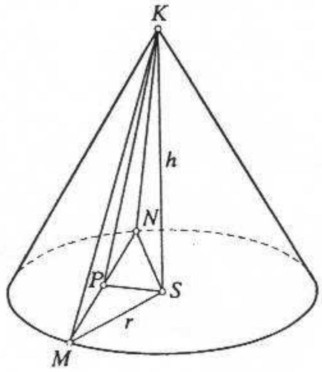
a) $x = \frac{1}{2}[\arcsin(A+B) + \arcsin(A-B)]$,
$y = \frac{1}{2}[\arcsin(A+B) - \arcsin(A-B)]$;

b) $x = \frac{1}{2}[\arcsin(A+B) - \arcsin(A-B)] + \frac{\pi}{2}$,
$y = \frac{1}{2}[\arcsin(A+B) + \arcsin(A-B)] - \frac{\pi}{2}$;

c) $x = \frac{1}{2}[-\arcsin(A+B) + \arcsin(A-B)] + \frac{\pi}{2}$,
$y = \frac{1}{2}[-\arcsin(A+B) - \arcsin(A-B)] + \frac{\pi}{2}$;

d) $x = \frac{1}{2}[-\arcsin(A+B) - \arcsin(A-B)] + \pi$,
$y = \frac{1}{2}[-\arcsin(A+B) + \arcsin(A-B)]$. 10 bodova

2. Neka je $|MN| = a$, P polovište od $\overline{MN}$, $\alpha = \angle KPS$. Sada je



$h = |PS| \tan\alpha$, $|PS| = \sqrt{r^2 - (\frac{a}{2})^2}$ $\Rightarrow$ $h = \sqrt{r^2 - (\frac{a}{2})^2} \tan\alpha$ (1)

Analogno je i $h = \sqrt{r^2 - (\frac{b}{2})^2} \tan\beta$. (2)

5 bodova

Iz (1) i (2) dobivamo

$$r^2 = \frac{(\frac{a}{2})^2 \tan^2\alpha - (\frac{b}{2})^2 \tan^2\beta}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}.$$

10 bodova

Prema (1) je

$$h=\sqrt{\frac{(\frac{a}{2})^2-(\frac{b}{2})^2}{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}}\tan\alpha\tan\beta.$$

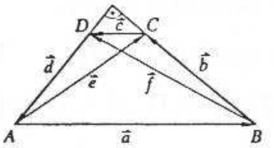
. 5 bodova

Sada je obujam stošca

$$V=\frac{1}{3}r^2\pi h=\frac{\pi}{24}\tan\alpha\tan\beta\cdot\frac{a^2\tan^2\alpha-b^2\tan^2\beta}{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}\cdot\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}}.$$

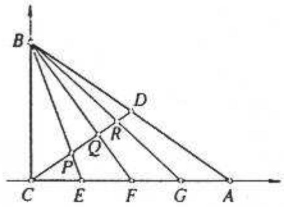
. 5 bodova

3. Neka je $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{BC},\vec{c}=\overrightarrow{CD},\vec{d}=\overrightarrow{DA},\vec{e}=\overrightarrow{AC},\vec{f}=\overrightarrow{BD}$.



Vrijede ove jednakosti:
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$,
$\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{f}=\vec{b}+\vec{c}$.
Sada je
$e^2+f^2=(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{b}+\vec{c})^2=a^2+c^2+2b^2+2\vec{b}(\vec{a}+\vec{c})=$
$=a^2+c^2+2b^2-2\vec{b}(\vec{b}+\vec{d})=a^2+c^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}$.
Odavde vidimo da je
$\vec{b}\perp\vec{d} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{b}\cdot\vec{d}=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^2+f^2=a^2+c^2.$ 25 bodova

4. Postavimo koordinatni sustav tako da mu ishodište bude u vrhu C, a stranice $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ na koordinatnim osima x i y. Sada je $C(0,0)$, $A(b,0)$, $B(0,a)$, $D(\frac{b}{2},\frac{a}{2})$, $E(\frac{b}{4},0)$, $F(\frac{b}{2},0)$, $G(\frac{3b}{4},0)$.



. 5 bodova

Jednadžbe pravaca CD, BE, BF i BG su

$CD \quad\ldots\quad y=\frac{a}{b}x,\qquad BE \quad\ldots\quad y=-\frac{4a}{b}x+a,$
$BF \quad\ldots\quad y=-\frac{2a}{b}x+a,\qquad BG \quad\ldots\quad y=-\frac{4a}{3b}x+a.$ 10 bodova
Zatim odredimo točke P, Q i R.
$P=CD\cap BE \quad\ldots\quad P(\frac{b}{5},\frac{a}{5})$,
$Q=CD\cap BF \quad\ldots\quad Q(\frac{b}{3},\frac{a}{3})$,
$R=CD\cap BG \quad\ldots\quad R(\frac{3b}{7},\frac{3a}{7})$. 5 bodova
Sada je $|PQ|=\frac{2}{15}\sqrt{a^2+b^2}$, $|QR|=\frac{2}{21}\sqrt{a^2+b^2}$.
Traženi omjer je jednak $\frac{|PQ|}{|QR|}=\frac{7}{5}$. 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

1. travnja 1995. godine

IV. razred

1. Nađite jednadžbe zajedničkih tangenata parabola
   $y = 2x^2 - 1 \qquad$ i $\qquad y = (x-1)^2$.

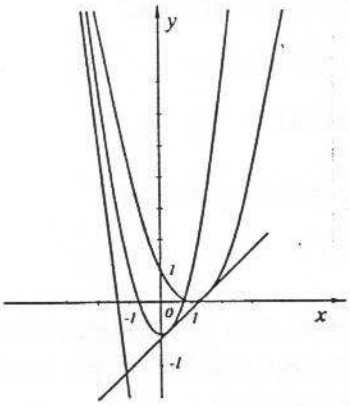
2. Zadano je 1995 kompleksnih brojeva. Ako pomnožimo bilo koja dva od njih (ne nužno različita), dobijemo opet jedan od tih brojeva. Nađite sve skupove brojeva koji imaju to svojstvo.

3. Dokažite da za svaki $n \geq 3$ postoje neparni brojevi x i y takvi da je $2^n = 7x^2 + y^2$.

4. Dan je aritmetički niz $1995, 1999, \ldots$. Dokažite da taj niz sadrži beskonačno mnogo prostih brojeva.

Rješenja zadataka za četvrti razred.
Svaki zadatak nosi 25 bodova.

1. Zajednička tangenta ovih parabola prolazi točkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2), tj. $y_1 = 2x_1^2 - 1$ i $y_2 = (x_2 - 1)^2$. Njezin koeficijent smjera je
$(2x^2 - 1)'_{x=x_1} = [(x-1)^2]'_{x=x_2} = \frac{(x_2-1)^2-(2x_1^2-1)}{x_2-x_1}$, tj.
$4x_1 = 2(x_2 - 1) = \frac{(x_2-1)^2-(2x_1^2-1)}{x_2-x_1}$. 10 bodova



Odavde ćemo odrediti točke dodira tangente i parabola:
$x_1 = \frac{x_2-1}{2}$,
pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo
$x_2^2 + 2x_2 - 5 = 0$
čija rješenja su $x_2 = -1 + \sqrt{6}$ i $x_2 = -1 - \sqrt{6}$. Sada je $y_2 = 10 - 4\sqrt{6}$ odosno $y_2 = 10 + 4\sqrt{6}$. 5 bodova

U prvom slučaju je koeficijent smjera tangente $k = -4 + 2\sqrt{6}$ i njezina jednadžba je
$y = (-4 + 2\sqrt{6})x - 6 + 2\sqrt{6}$. 5 bodova

U drugom slučaju je koeficijent smjera tangente $k = -4 - 2\sqrt{6}$ i njezina jednadžba je
$y = -(4 + 2\sqrt{6})x - 6 - 2\sqrt{6}$. (5 bodova)

2. Svi brojevi po modulu moraju biti jednaki 1 (u protivnom bi množeći taj broj sa samim sobom dobili beskonačno mnogo brojeva). (5 bodova)

Označimo sa α_k argument $k-$tog broja, $z_k = \cos\alpha_k + i \sin\alpha_k$. Pri množenju se argumenti zbrajaju.

1) Svi brojevi α_k su oblika $\frac{p_k}{q_k} \cdot 2\pi$, gdje su p_k i q_k prirodni brojevi (u protivnom bi množeći broj sa samim sobom dobili beskonačno mnogo brojeva). (5 bodova)

2) Neka je $q_{\max}$ najveći broj u skupu $Q = \{q_1, \ldots, q_{1995}\}$ pretpostavimo da neki q_k ne dijeli $q_{\max}$. Tada bi bilo $\arg z_{\max} z_k = \alpha_{\max} + \alpha_k = (\frac{p_{\max}}{q_{\max}} + \frac{p_k}{q_k}) \cdot 2\pi = \frac{p'}{q'} \cdot 2\pi$, $q' = v(q_{\max}, q_k)$. Tada je $q' > q_{\max}$ što je suprotno pretpostavci. Zato svaki q_k dijeli $q_{\max}$. (5 bodova)

3) Svaki argument je oblika $\frac{p_k}{q_{\max}}$. Neka je $p_1 > 0$ najmanji meddu brojevima $\{p_k\}$. Brojevi p_1 i $q_{\max}$ su relativno prosti. Tada su brojevi $\frac{p_1}{q_{\max}}, \frac{2p_1}{q_{\max}}, \ldots, \frac{1995p_1}{q_{\max}}$ svi argumenti danih kompleksnih brojeva. Neka je $kp_1 \equiv r_k \pmod{q_{\max}}$. Tada bi za $1 \leq k < j \leq 1995$ bilo $(j-k)p_1 \equiv 0 \pmod{q_{\max}}$ tj. $q_{\max}$ bi dijelio $j-k$ ssto nije moguche. Zato mora biti $q_{\max} \geq 1995$. (5 bodova)

4) Mora biti $q_{\max} = 1995$ (u protivnom bismo imali manje od 1995 brojeva, jer su svi mogući argumenti oblika $\alpha_k = \frac{k}{q_{\max}} \cdot 2\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots, q_{\max}$).

Konačno je $\alpha_k = \frac{k}{1995} \cdot 2\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 1994$. Ti brojevi su rješenja jednadžbe $x^{1995} = 1$. (5 bodova)

3. Dokaz se provodi matematičkom indukcijom.

Za $n = 3$ je $2^3 = 7 \cdot 1^2 + 1^2$.

Pretpostavimo da je za neki $n \in \mathrm{N}$, $2^n = 7x^2 + y^2$, gdje su x i y neparni brojevi. Sada je

$2^{n+1} = 2 \cdot 7x^2 + 2 \cdot y^2 = 7 \cdot (\frac{x+y}{2})^2 + (\frac{7x-y}{2})^2 = 7 \cdot (\frac{x-y}{2})^2 + (\frac{7x+y}{2})^2$. (10 bodova)

Kako su x i y neparni, $x+y, x-y, 7x-y, 7x+y$ su parni.

Ako $4 | x+y$ tada $4 \not| x-y$ i iz $7x - y = 7(x+y) - 8y$ slijedi da $4 | 7x-y$ pa stoga $4 \not| 7x+y$. (5 bodova)

Ako $4 | x-y$ tada $4 \not| x+y$ i iz $7x + y = 7(x-y) + 8y$ slijedi da $4 | 7x+y$ pa stoga $4 \not| 7x-y$. (5 bodova)

Dakle u svakom slučaju možemo izabrati neparne x i y takve da vrijedi dana jednakost. (5 bodova)

4. Treba dokazati da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $4k+3$. Pretpostavimo suprotno, tj. da su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ svi prosti brojevi oblika $4k+3$.

Promatrajmo broj $A = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$. Broj A ima neki prosti faktor oblika $4k+3$ (jer bi u protivnom A imao oblik $4k+1$), a on nije niti jedan od $p_1, p_2, \ldots, p_n$, što je u suprotnosti s pretpostavkom.

Prema tome, postoji beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $4k+3$ (a samim tim ih ima beskonačno mnogo većih od 1995.) (25 bodova)