MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

5. državno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
Kraljevica, 16.-19. svibnja 1996. godine

7. razred

1. Jednadžba pravca p je $4x - 3y - 8 = 0$, a jednadžba pravca q je $y = -\frac{4}{5}x + 8$. Točka A je presjek pravca p i x-osi, točka B presjek pravca q i x-osi, a točka C presjek pravaca p i q.

   Kolika je površina trokuta ABC?

2. Poštar raznosi poštu vozeći se na biciklu. Od pošte do mjesta A ima 48 km, pri čemu je prvih 10 km horizontalni put, zatim 10 km uzbrdo, pa 6 km opet horizontalni put i ostatak puta je nizbrdica. Na ravnom dijelu puta poštareva je brzina 8 km na sat, a na uzbrdici 3 km na sat.

   Kolikom brzinom poštar vozi na nizbrdici, ako mu za povratak iz mjesta A do pošte treba $\frac{14}{5}$ sata više nego od pošte do mjesta A ?

3. Odredi četveroznamenkasti broj $\overline{abcd}$ za koji vrijedi

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297 \quad \text{i} \quad a + b + c = 23.$$

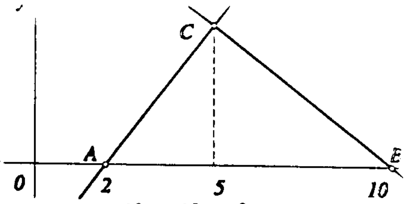
4. Dan je pravokutnik $ABCD$, pri čemu je $|AB| = a$, $|BC| = b$ i $a > b$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka M, a na stranici $\overline{CD}$ točka N tako da je $|AM| = \frac{2}{3}a$ i $|CN| = \frac{1}{2}a$. Presjek dijagonale $\overline{AC}$ i dužine $\overline{MN}$ je točka S.

   Koliko posto površine pravokutnika $ABCD$ čini zbroj površina trokuta AMS i trokuta CNS ?

5. U trokutu ABC središta opisane i upisane kružnice su simetrično pridružene točke s obzirom na stranicu $\overline{AB}$.

   Koliki su unutarnji kutovi trokuta ABC ?

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 7. RAZRED



1. Koordinate vrhova su $A(2,0)$, $B(10,0)$, $C(5,4)$. Očito je ordinata točke C duljina visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$. Uz to je $|AB| = 8$, pa je $P(ABC) = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$.

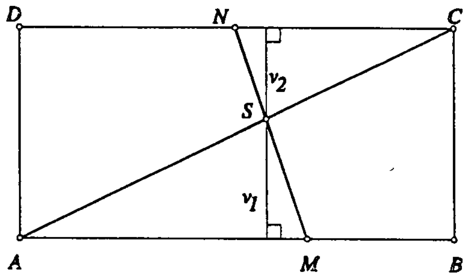
2. Neka je x brzina kojom poštar vozi na nizbrdici. Put od pošte do mjesta A poštar je prešao za $\frac{10}{8} + \frac{10}{3} + \frac{6}{8} + \frac{22}{x}$ sati. Isti put od mjesta A do pošte prešao je za $\frac{22}{3} + \frac{6}{8} + \frac{10}{x} + \frac{10}{8}$ sati. Zato vrijedi jednadžba

$$\frac{22}{3} + \frac{6}{8} + \frac{10}{x} + \frac{10}{8} = \frac{10}{8} + \frac{10}{3} + \frac{6}{8} + \frac{22}{x} + \frac{14}{5}.$$

Rješenje jednadžbe je $x = 10$. Prema tome, brzina poštara na nizbrdici je 10 km na sat.

3. Zadanu jednakost $\overline{cda} - \overline{abc} = 297$ možemo pisati u obliku $100c + 10d + a - 100a - 10b - c = 297$ ili nakon sređivanja $99(c-a) + 10(d-b) = 297$. Kako su zbroj i jedan pribrojnik djeljivi sa 99, to je nužno i drugi pribrojnik djeljiv s 99, tj. $d - b$ je djeljivo sa 99, a to je moguće samo ako je $d - b = 0$. Dakle, $b = d$ i $c - a = 3$. Zbog $a + b + c = 23$ i $c = a + 3$ imamo $2a + b = 20$. Sada lako ustanovimo da je jedino rješenje broj 6898.

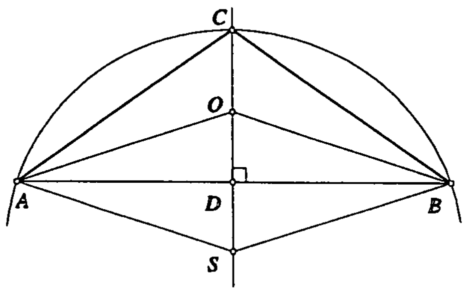
4.



Neka je v_1 visina trokuta AMS iz vrha S na stranicu $\overline{AM}$, v_2 visina trokuta CNS iz vrha S na stranicu $\overline{CN}$. Lako se pokaže da je $\triangle AMS \sim \triangle CNS$. Naime, $\angle SAM = \angle SCN$ (kutovi uz presječnicu), $\angle ASM = \angle CSN$ (vršni kutovi). Zato je $v_1 : v_2 = \frac{2}{3}a : \frac{1}{2}a$ ili $v_1 : v_2 = 4 : 3$, a zbog $v_1 + v_2 = b$, lako odredimo da je $v_1 = \frac{4}{7}b$ i $v_2 = \frac{3}{7}b$. Odredimo sad traženu površinu.

$P(AMS) + P(CNS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{4}{7}b + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{7}b = \frac{25}{84}ab \approx 0.2976ab$. Prema tome, zbroj površina trokuta AMS i CNS čini 29.76% površine pravokutnika $ABCD$.

5.



Neka je točka O središte upisane kružnice, a točka S središte opisane kružnice trokuta ABC i neka je $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ i $\angle ACB = \gamma$. Očito je pravac OS simetrala dužine $\overline{AB}$. Neka je točka D presjek dužina $\overline{OS}$ i $\overline{AB}$. Kako je središte upisane kružnice trokuta sjecište simetrala unutarnjih kutova trokuta slijedi da je $\angle OAB = \angle OAC = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle OBA = \frac{\beta}{2}$. Lako se pokaže da je $\triangle ADO \cong \triangle BDO$, jer je $|AD| = |BD|$, $\overline{OD}$ je zajednička stranica i $\angle ADO = \angle BDO = 90°$, iz čega slijedi da je $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$, tj. $\alpha = \beta$, a to znači da je trokut ABC jednakokračan, pa je $\angle ACD = \frac{\gamma}{2}$. Pokažimo još da je i $\triangle ADO \cong \triangle ADS$. Naime, $\overline{AD}$ je zajednička stranica, $|OD| = |SD|$ (zbog simetrije) i $\angle ADO = \angle ADS = 90°$, iz čega slijedi da je $\angle OAD = \angle SAD = \frac{\alpha}{2}$. Kako je $|SA| = |SC|$ (polumjer opisane kružnice), slijedi da je trokut SAC jednakokračan, a to znači da $\angle SAC = \angle SCA$ ili $3 \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$, tj. $3\alpha = \gamma$. Uz to u trokutu ABC vrijedi i $2\alpha + \gamma = 180°$, pa je $2\alpha + 3\alpha = 180°$, tj. $\alpha = \beta = 36°$ i $\gamma = 108°$.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

5. državno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
Kraljevica, 16.-19. svibnja 1996. godine

8. razred

1. Koliko ima prirodnih brojeva n za koje vrijedi nejednakost

$$1995 < \sqrt{n} < 1996 \ ?$$

2. Koliko ima troznamenkastih brojeva sa svojstvom da je zbroj tog broja i broja napisanog istim znamenkama, ali obrnutog redoslijeda, djeljiv sa 5 ?

3. Duljina stranice kvadrata jednaka je 1. Sjecištem dijagonala kvadrata nacrtan je bilo koji pravac koji ne prolazi ni jednim vrhom kvadrata.

   Koliki je zbroj kvadrata udaljenosti sva četiri vrha kvadrata od tog pravca ?

4. Nakon završetka šahovskog turnira ustanovljeno je da je svaki igrač polovicu svojih bodova dobio u igrama sa zadnja tri igrača u krajnjem poretku. Koliko je igrača sudjelovalo na turniru ?

   Prema šahovskim pravilima, pobjeda donosi 1 bod, neriješen rezultat ili remi $\frac{1}{2}$ boda, a poraz 0 bodova, te na turniru svaki igrač igra sa svakim igračem jednu partiju.

5. Zadan je konveksni četverokut $ABCD$. Točka M na stranici $\overline{AB}$ i točka N na stranici $\overline{BC}$ odabrane su tako da i dužina $\overline{AN}$ i dužina $\overline{CM}$ raspolavljaju površinu četverokuta $ABCD$.

   Dokaži da dužina $\overline{MN}$ raspolavlja dijagonalu $\overline{BD}$.

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 8. RAZRED

1. Kvadriramo li svaki član nejednakosti dobivamo $1995^2 < n < 1996^2$. Ukupan broj prirodnih brojeva n za koje je ta nejednakost točna jeste $1996^2 - 1995^2 - 1 = (1996 - 1995)(1996 + 1995) - 1 = 3990$.

2. Neka traženi troznamenkasti brojevi imaju oblik $\overline{abc}$. Tada vrijedi $\overline{abc} + \overline{cba} = 100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 101(a + c) + 20b$. Traženi zbroj bit će djeljiv sa 5 samo ako je zbroj $a + c$ djeljiv sa 5, tj. ako je $a + c = 5$, $a + c = 10$, $a + c = 15$.

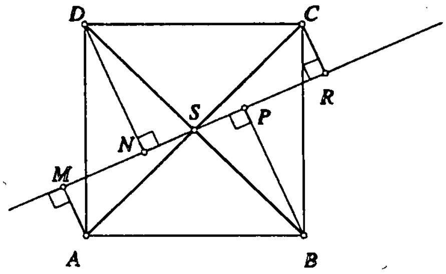
Za $a + c = 5$ imamo ovih pet mogućnosti $(a, c) \in \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)(5, 0)\}$. Za svaku od tih mogućnosti možemo sastaviti 10 troznamenkastih brojeva (jer $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$), pa imamo ukupno 50 brojeva.

Za $a+c = 10$ imamo ovu situaciju $(a, c) \in \{(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)\}$, pa ima ukupno $9 \cdot 10$, tj. 90 troznamenkastih brojeva.

Za $a + c = 15$ imamo $(a, c) \in \{(6, 9), (7, 8), (8, 7), (9, 6)\}$, i ima 40 troznamenkastih brojeva s traženim svojstvom.

Prema tome, ukupno ima 180 troznamenkastih brojeva s traženim svojstvom.

3.



Neka je točka S sjecište dijagonala kvadrata i neka su točke M, N, P, R redom nožišta okomica iz vrhova A, D, B, C redom na pravac. Lako se pokaže da je:

$\triangle DNS \cong \triangle BPS$ jer je $|DS| = |BS|$, $\angle DSN = \angle BSP$ (vršni kutovi) i $\angle DNS = \angle BPS = 90°$, iz čega slijedi da je $|DN| = |BP| = y$;

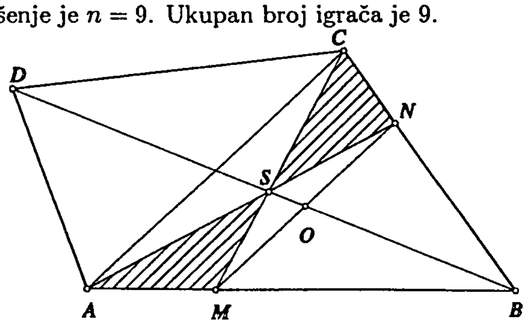
$\triangle AMS \cong \triangle CRS$, jer je $|AS| = |CS|$, $\angle ASM = \angle CSR$ (vršni kutovi), $\angle AMS = \angle CRS = 90°$, pa je $|AM| = |CR| = x$;

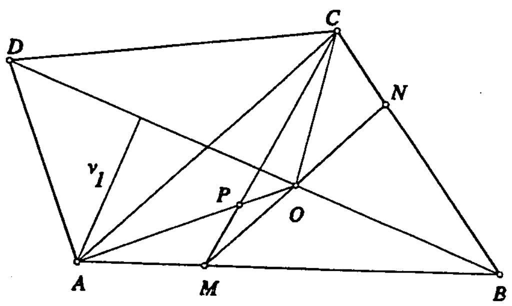
$\triangle AMS \cong \triangle BPS$, jer je $|AS| = |BS|$, $\angle AMS = \angle BPS = 90°$, $\angle ASM = \angle SBP$ (kutovi s okomitim kracima), iz čega slijedi da je $|AM| = |SP| = x$.

Neka je $|BD| = d$. Primjenom Pitagorina poučka na trokut BPS dobivamo $|SP|^2 + |BP|^2 = |SB|^2$, odnosno $x^2 + y^2 = (\frac{d}{2})^2$, a zbog $|AM|^2 + |CR|^2 + |DN|^2 + |BP|^2 = 2x^2 + 2y^2$ i $d = \sqrt{2}$ imamo $2(x^2 + y^2) = \frac{d^2}{2}$, tj. $2(x^2 + y^2) = 1$.

4. Neka je n broj igrača na šahovskom turniru. Zadnja trojica u krajnjem poretku u međusobnim susretima, svaki sa svakim, osvojili su ukupno 3 boda, iz čega slijedi da su oni 3 boda osvojili i u igrama s preostala $n - 3$ igrača koji su se bolje plasirali od njih. Iz uvjeta je jasno da je prvih $n - 3$ igrača polovicu bodova osvojilo u igrama sa zadnjom trojicom, a drugu polovicu u međusobnim igrama. Prvih $n - 3$ igrača su u igrama sa zadnjom trojicom odigrali 3(n-3) igre, a osvojili $3(n - 3) - 3$, tj. $3(n - 4)$ boda, jer 3 boda pripadaju zadnjoj trojici. U međusobnim susretima $n - 3$ igrača odigrali su $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ igre i osvojili isto toliko bodova. Zato vrijedi jednadžba $3(n - 4) = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$ ili $6(n - 4) = (n - 3)(n - 4)$. Kad bi n bio 4 tada bi slijedilo da je pobjednik izgubio sve igre, što je nemoguće, pa zato zadnju jednadžbu možemo podijeliti s $n - 4$, i rješenje je $n = 9$. Ukupan broj igrača je 9.

5.





Neka je točka S presjek dužina $\overline{AN}$ i $\overline{CM}$. Kako je $P(ABN) = P(BCM)$ slijedi da je $P(ABN) - P(BNSM) = P(BCM) - P(BNSM)$, tj. $P(AMS) = P(NCS)$. Dalje vrijedi, $P(AMS) + P(ASC) = P(NCS) + P(ASC)$, tj. $P(AMC) = P(ANC)$, a zbog zajedničke stranice $\overline{AC}$ slijedi da trokuti AMC i ANC imaju jednaku visinu, pa je $MN \parallel AC$.

Neka je točka O presjek dužina $\overline{MN}$ i $\overline{BD}$ i neka je točka P presjek dužina $\overline{AO}$ i $\overline{CM}$. Četverokut $AMOC$ je očito trapez pa je $P(AMP) = P(CPO)$, a zbog $P(AMCD) = \frac{1}{2}P(ABCD)$, slijedi da je $P(AOCD) = \frac{1}{2}P(ABCD)$.

Neka je v_1 visina iz vrha A na dijagonalu $\overline{BD}$ i v_2 visina iz vrha C na dijagonalu $\overline{BD}$. Tada vrijedi $P(AOD) = \frac{|OD| \cdot v_1}{2}$ i $P(ABD) = \frac{|BD| \cdot v_1}{2}$, iz čega slijedi da je $\frac{P(AOD)}{P(ABD)} = \frac{|OD|}{|BD|}$. Slično vrijedi $P(DOC) = \frac{|OD| \cdot v_2}{2}$, $P(DBC) = \frac{|BD| \cdot v_2}{2}$, tj. $\frac{P(DOC)}{P(DBC)} = \frac{|OD|}{|BD|}$.

Kako je $P(AOCD) = P(AOD) + P(DOC) = \frac{1}{2}P(ABCD)$, to zamjenom dobivenih vrijednosti dobivamo, redom, $\frac{1}{2}P(ABCD) = \frac{|OD|}{|BD|} \cdot P(ABD) + \frac{|OD|}{|BD|} \cdot P(DBC)$, $\frac{1}{2}P(ABCD) = \frac{|OD|}{|BD|} \cdot (P(ABD) + P(DBC))$, $\frac{1}{2}P(ABCD) = \frac{|OD|}{|BD|} \cdot P(ABCD)$ ili $\frac{1}{2} = \frac{|OD|}{|BD|}$, tj. $|BD| = 2|OD|$, iz čega slijedi da je točka O polovište dijagonale $\overline{BD}$.