MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko - gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
16. ožujka 1996. godine

8. razred

1. Izračunaj $\sqrt{20+2\sqrt{19}}+\sqrt{20-2\sqrt{19}}$.

2. Točka $A(-4,2)$ je vrh trokuta ABC. Na pravcu $y=3x-7$ leži stranica $\overline{BC}$, a na pravcu $y=2x+8$ leži visina iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$. Kolike su koordinate vrhova B i C trokuta ABC?

3. Avion je udaljenost od 6000 km preletio za neko vrijeme. Da je svakog sata avion preletio 100 km više, tada bi navedenu udaljenost preletio za 2 sata manje. Za koje je vrijeme avion preletio navedenu udaljenost?

4. Dan je trokut ABC, pri čemu je

$$\angle CAB=60^\circ \ , \ \angle ABC=45^\circ \quad \text{i} \quad |BC|=10\sqrt{3} \ .$$

Kolika je udaljenost vrha A od ortocentra trokuta ABC?

5. Dana je kružnica polumjera r. Iz točke A koja leži izvan kružnice konstruiraj tangente na zadanu kružnicu. Neka su točke M i N dirališta tih tangenti i zadane kružnice. Na manjem kružnom luku $\overset{\frown}{MN}$ u nekoj točki P konstruiraj tangentu t na zadanu kružnicu. Tangenta t siječe dužinu $\overline{AM}$ u točki B, a dužinu $\overline{AN}$ u točki C. Dokaži da opseg trokuta ABC ne zavisi o odabiru točke P, tj. da je opseg trokuta ABC stalan i jednak $|AM|+|AN|$.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

196 Opć

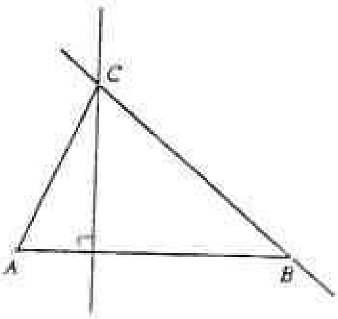
OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ČLAN KOMISIJE JE DUŽAN I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. **Prvo rješenje:** Neka je $x = \sqrt{20 + 2\sqrt{19}} + \sqrt{20 - 2\sqrt{19}}$. .... 1 bod
   Ako ovu jednakost kvadriramo, dobivamo redom:
   $x^2 = 20 + 2\sqrt{19} + 2\sqrt{(20 + 2\sqrt{19})(20 - 2\sqrt{19})} + 20 - 2\sqrt{19}$, ... 2 boda
   $x^2 = 40 + 2\sqrt{400 - 4 \cdot 19}$, $x^2 = 40 + 2 \cdot 18$, $x^2 = 76$, ... 4 boda
   ili $x^2 = 4 \cdot 19$, tj. $x = 2\sqrt{19}$. .... 3 boda

   UKUPNO 10 bodova

   Drugo rješenje:
   $\sqrt{20 + 2\sqrt{19}} + \sqrt{20 - 2\sqrt{19}} = \sqrt{(\sqrt{19} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{19} - 1)^2} = \sqrt{19} + 1 + \sqrt{19} - 1 = 2\sqrt{19}$.

2. Skica .... 1 bod
   Rješenje sustava jednadžbi $y = 3x - 7$, $y = 2x + 8$ jeste $x = 15$, $y = 38$, a to su koordinate vrha C, tj. $C(15, 38)$. .... 3 boda
   Kako je pravac AB okomit na pravac čija je jednadžba $y = 2x + 8$, to ćemo jednadžbu pravca AB odrediti po formuli $y - y_0 = a(x - x_0)$, pri čemu je $a = -\frac{1}{2}$, a (x_0, y_0) su koordinate točke A. Zato vrijedi $y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 4)$, ili $y = -\frac{1}{2}x$. .... 3 boda
   Rješenje sustava $y = -\frac{1}{2}x$, $y = 3x - 7$ jeste $x = 2$, $y = -1$, a to su koordinate vrha B, tj. $B(2, -1)$

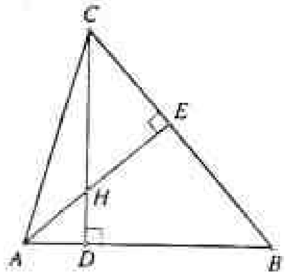


UKUPNO 10 bodova

3. Neka je x vrijeme za koje je avion preletio navedenu udaljenost bez povećanja brzine. Tada je taj put preletio brzinom $\frac{6000}{x}$ km na sat. .... 1 bod
   Da je svakog sata preletio 100 km više, avion bi danu udaljenost preletio brzinom $\frac{6000}{x-2}$ km na sat.
   1 bod
   Zato vrijedi jednadžba $\frac{6000}{x-2} = \frac{6000}{x} + 100$. .... 2 boda
   Nakon sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - 2x - 120 = 0$. .... 2 boda
   Dalje vrijedi $x^2 - 12x + 10x - 120 = 0$, $x(x - 12) + 10(x - 12) = 0$, ili $(x - 12)(x + 10) = 0$. Sad je očito samo $x - 12 = 0$, tj. $x = 12$. .... 3 boda
   Avion je udaljenost od 6000 km preletio za 12 sati. .... 1 bod

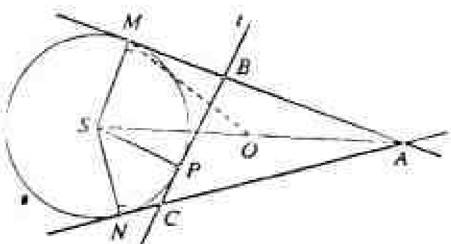
   UKUPNO 10 bodova

4. Neka je točka D nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, točka E nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ i neka je točka H ortocentar trokuta ABC. Kako je $\angle CBA = 45°$, a $\angle CDB = 90°$, slijedi da je $\angle BCD = 45°$, a to znači da je pravokutni trokut CDB jednakokračan, tj. vrijedi da je $|CD| = |BD|$, pa je $|BC| = |CD|\sqrt{2}$, ili $|CD|\sqrt{2} = 10\sqrt{3}$, tj. $|CD| = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. ....3 boda
Pravokutni trokut ADC je polovica jednakostraničnog trokuta, jer je $\angle ADC = 90°$, a $\angle CAD = 60°$, pa je $|CD| = \frac{|AC|\sqrt{3}}{2}$, odnosno $5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{|AC|\sqrt{3}}{2}$, ili $10\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = |AC|\sqrt{3}$, tj. $|AC| = 10\sqrt{2}$, a zbog $|AD| = \frac{|AC|}{2}$ slijedi da je $|AD| = \frac{10\sqrt{2}}{2}$, tj. $|AD| = 5\sqrt{2}$. ....4 boda
Očito je u pravokutnom trokutu CEH kut $\angle CHE = 45°$, iz čega slijedi da je $\angle AHD = 45°$ (vršni kutovi), pa je $\angle HAD = 45°$, a to znači da je pravokutni trokut ADH jednakokračan, tj. $|AD| = |HD|$. Zato je $|AH| = |AD|\sqrt{2}$, ili $|AH| = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, tj. $|AH| = 10$. ....3 boda



UKUPNO 10 bodova

5. Neka je točka S središte dane kružnice polumjera r, a točka O središte kružnice promjera $|AS|$.
Točna konstrukcija dvije tangente iz točke A na danu kružnicu primjenom Talesovog poučka
....1 bod
Točna konstrukcija tangente točkom P na danu kružnicu. ....1 bod
Lako se dokaže da je $\triangle SMO \cong \triangle SNO$, jer je $|SM| = |SN| = r$, i $|OS| = |OM| = |ON|$, pa je $\angle OSM = \angle OSN$. ....1 bod
Sad dokažimo da je $\triangle SMA \cong \triangle SNA$. Naime, $|SM| = |SN| = r$, dužina $\overline{AS}$ je zajednička stranica i $\angle ASM = \angle ASN$, a to znači da je $|AM| = |AN|$. ....2 boda
Pravac CN i pravac CP su dvije tangente iz točke C na danu kružnicu, a pravci BP i BM su druge dvije tangente na danu kružnicu. Prema prethodno dokazanom slijedi da je $|CN| = |CP|$ i $|BP| = |BM|$. ....3 boda
Kako je $|BC| = |BP| + |CP|$, slijedi da je opseg trokuta ABC jednak $|AB| + |BC| + |AC| = |AB| + |BP| + |CP| + |AC|$ ili $|AB| + |BC| + |AC| = |AB| + |BM| + |CN| + |AC|$, tj. $|AB| + |BC| + |AC| = |AM| + |AN|$ ....2 boda



UKUPNO 10 bodova