MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
20. travnja 1996. godine

7. razred

1. Za koju je vrijednost parametra m rješenje jednadžbe

$$3(m - x) + 5 = 2(m + 2) - 5(x + 2)$$

jednako nuli ?

2. Veslajući rijekom nizvodno, čamcem se od mjesta A do mjesta B stigne za tri sata. Veslajući istom brzinom uzvodno od B do A čamac stigne za 4 sata i 30 minuta.

   Za koje bi vrijeme čamac stigao od mjesta A do mjesta B bez veslanja, tj. ako ga nosi samo rijeka ?

3. Odredi sve troznamenkaste brojeve djeljive sa 7 kojima je zbroj znamenki jednak 8.

4. Dan je pravokutnik $ABCD$, pri čemu je točka P sjecište dijagonala pravokutnika. Na dijagonali $\overline{BD}$ odabrana je točka M tako da je ona polovište dužine $\overline{DP}$.

   Koliko posto površine pravokutnika $ABCD$ zauzima površina trokuta ACM ?

5. Dan je kvadrat $ABCD$. Na stranici $\overline{BC}$ određena je bilo koja točka E različita od B i C. Simetrala kuta $\angle DAE$ siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki F. Dokaži da je $|AE| = |FD| + |BE|$.

ŽUPANIJSKO 7. RAZ. 1996.

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ČLAN KOMISIJE JE DUŽAN I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Ako zadanu jednadžbu riješimo po x, rješenje je $x = -\frac{m+11}{2}$. .... 5 bodova
Za $x = 0$ dobivamo $\frac{-m-11}{2} = 0$, odnosno $m = -11$. .... 3 boda
Rješenje zadane jednadžbe jednako je 0, ako je vrijednost parametra $m = -11$. .... 2 boda
UKUPNO 10 bodova

2. Neka je a brzina čamca u mirnoj vodi i b brzina rijeke. Tada je $a + b$ brzina čamca nizvodno, a $a - b$ brzina čamca uzvodno. .... 1 bod
Zato vrijedi jednakost $3(a + b) = 4.5(a - b)$ ili nakon sređivanja $a = 5b$. .... 4 boda
Neka je x vrijeme za koje bi čamac stigao od A do B ako ga nosi samo rijeka. Tada vrijedi jednakost $3(a+b) = xb$, odnosno $3a + 3b = xb$, a zbog $a = 5b$ dobivamo $3 \cdot 5b + 3b = xb$ ili $18b = xb$, tj. $x = 18$. .... 4 boda
Prema tome, čamac bez veslanja stigne od mjesta A do mjesta B za 18 sati. .... 1 bod
UKUPNO 10 bodova

3. Neka traženi troznamenasti broj ima oblik $\overline{abc}$. Tada vrijedi $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 98a + 7b + a + 2b + (a + b + c) = 7(14a + b) + a + 2b + 8$. .... 1 bod
Sada je očito pribrojnik $a + 2b + 8$ djeljiv sa 7, tj. $a + 2b + 8 = 7k$, pri čemu je $k = 2$, $k = 3$ ili $k = 4$. .2 boda
Zato razlikujemo sljedeće slučajeve:

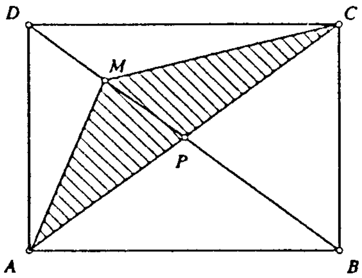
1. Za $k = 2$ dobivamo $a + 2b = 6$, pa je nužno a paran broj, tj. $a = 2$, $a = 4$ ili $a = 6$. Za $a = 2$ dobivamo $b = 2$ i $c = 4$. Za $a = 4$, $b = 1$ i $c = 3$. Za $a = 6$, $b = 0$ i $c = 2$. .... 3 boda

2. Za $k = 3$ dobivamo $a + 2b = 13$, pri čemu je nužno a neparna znamenka. Za $a = 1$ je $b = 6$ i $c = 1$. Za $a = 3$ je $b = 5$ i $c = 0$. Za $a = 5$, $a = 7$ i $a = 9$ nema rješenja. .... 2 boda

3. Za $k = 4$ nema rješenja.

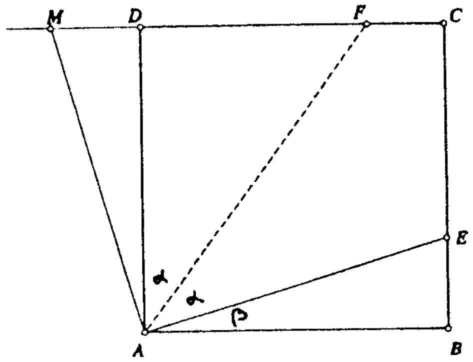
Prema tome, traženi brojevi su 224, 413, 602, 161, 350. .... 2 boda
UKUPNO 10 bodova

4. .... 1 bod



Očito je $|MP| = \frac{1}{4}|BD|$, jer se dijagonale pravokutnika raspolavljaju, pa je $P(MPC) = \frac{1}{4}P(BCD)$, a zbog $P(BCD) = \frac{1}{2}P(ABCD)$ slijedi da je $P(MPC) = \frac{1}{8}P(ABCD)$. .... 2 boda
Iz istih razloga je $P(MPA) = \frac{1}{4}P(ABD)$, a zbog $P(ABD) = \frac{1}{2}P(ABCD)$ slijedi da je $P(MPA) = \frac{1}{8}P(ABCD)$. .... 1 bod
Kako je $P(ACM) = P(MPC) + P(MPA) = \frac{1}{8}P(ABCD) + \frac{1}{8}P(ABCD)$ slijedi da je $P(ACM) = \frac{1}{4}P(ABCD)$, tj. $P(ACM) = 0.25P(ABCD)$. .... 4 boda
Površina trokuta ACM zauzima 25% površine pravokutnika $ABCD$. .... 2 boda
UKUPNO 10 bodova

5. .



VII. raz. ŽUPANIJSKO

Skica .... 1 bod

Uvedimo oznake $\angle EAF = \angle FAD = \alpha$ i $\angle BAE = \beta$. Na produžetku stranice $\overline{CD}$ preko vrha D odaberemo točku M tako da je $|DM| = |BE|$. Lako se pokaže da su trokuti ADM i ABE sukladni, jer je $|AB| = |AD|$, $|DM| = |BE|$ i $\angle EBA = \angle MDA = 90^\circ$. To znači da je $|AM| = |AE|$ i $\angle DAM = \angle BAE = \beta$, tj. $\angle FAM = \alpha + \beta$. .... 5 bodova

Očito je i $\angle BAF = \angle AFM = \alpha + \beta$ (kutovi uz presječnicu), a to znači da je trokut AMF jednakokračan, tj. $|AM| = |FM|$. .... 2 boda

Kako je $|FM| = |FD| + |DM|$ iz već navedenih jednakosti imamo $|AE| = |AM| = |FM| = |FD| + |DM| = |FD| + |BE|$, tj. $|AE| = |FD| + |BE|$. .... 2 boda

UKUPNO 10 bodova