MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
20. travnja 1996. godine

8. razred

1. Izraz

$$A = \frac{1}{2}x^3 - \frac{k+2}{3}x^2 + \frac{9-k}{4}x + 55$$

ima vrijednost -1 za $x = -4$. Kolika je vrijednost toga izraza za $x = -\frac{2}{3}$?

(x^3 je oznaka za umnožak $x \cdot x \cdot x$.)

2. Kvadratu nekog cijelog broja a dodamo njegov trostruki višekratnik i oduzmemo 7, pa tako dobiveni broj podijelimo sa zbrojem $a + 2$. Za koji cijeli broj a je i taj količnik također cijeli broj ?

3. Svotu od 4800 kuna valja razdijeliti na određeni broj osoba, tako da svaka osoba dobije jednaki broj kuna. Kad bi se tri osobe odrekle svoga dijela, tada bi svaka od preostalih osoba dobila 80 kuna više.

   Koliko osoba sudjeluje u podjeli navedene svote ?

4. Dan je kvadrat $ABCD$ kome je površina 256. Na stranici $\overline{AD}$ odabrana je točka E, a na produžetku stranice $\overline{CD}$ preko vrha C odabrana je točka F, tako da je $\angle EBF$ pravi kut.

   Kolika je duljina $|CF|$, ako je površina trokuta EBF jednaka 200 ?

5. Dan je kvadrat $ABCD$, pri čemu je točka O sjecište dijagonala kvadrata. Na stranici $\overline{BC}$ odabrana je točka M, a na stranici $\overline{CD}$ točka N tako da je $|BM| = |CN|$. Dužine $\overline{AM}$ i $\overline{BN}$ sijeku se u točki P.

   Dokaži da je pravac PO simetrala kuta $\angle APN$.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ČLAN KOMISIJE JE DUŽAN I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Ako u zadani izraz stavimo $x = -4$ i $A = -1$ dobivamo

$$\frac{1}{2}(-4)^3 - \frac{k+2}{3}(-4)^2 + \frac{9-k}{4} \cdot (-4) + 55 = -1.$$

Rješenje ove jednadžbe je $k = 1$. .... 6 bodova
Uvrštavanjem dobivene vrijednosti $k = 1$ i vrijednosti $x = -\frac{2}{3}$ u zadani izraz imamo $A = \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})^3 - (-\frac{2}{3})^2 + 2 \cdot (-\frac{2}{3}) + 55$, te nakon sređivanja dobivamo traženu vrijednost $A = 53\frac{2}{7}$. .... 4 boda
UKUPNO 10 bodova

2. Opisanim postupkom dobiva se količnik

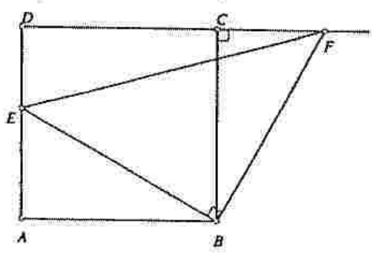
$$\frac{a^2+3a-7}{a+2} = \frac{a(a+2)+a-7}{a+2} = a + \frac{a+2-9}{a+2} = a+1-\frac{9}{a+2}.$$

.... 4 boda
Kako je $a+1$ cijeli broj nužno je da i razlomak $\frac{9}{a+2}$ bude cijeli broj, a to je moguće samo ako je $a+2=1$, $a+2=-1$, $a+2=3$, $a+2=-3$, $a+2=9$ i $a+2=-9$. .... 3 boda
Rješenja ovih jednadžbi su traženi cijeli brojevi, tj. $a=-1$, $a=-3$, $a=1$, $a=-5$, $a=7$, $a=-11$. ...3 boda
UKUPNO 10 bodova

3. Neka je n broj osoba na koje valja razdijeliti 4800 kuna, a x broj kuna koji valja dobiti svaka osoba. Tada je $nx = 4800$. Odreknu li se tri osobe svoga dijela, tada vrijedi jednakost $(n-3)(x+80) = 4800$, ... 2 boda
odnosno $nx + 80n - 3x - 240 = nx$ ili $80n - 3x - 240 = 0$, a zbog $x = \frac{4800}{n}$ dobivamo $80n - \frac{14400}{n} - 240 = 0$, te nakon sređivanja $n^2 - 3n - 180 = 0$. .... 2 boda
Dobivenu jednadžbu možemo dalje pisati redom $n^2 - 15n + 12n - 180 = 0$, $n(n-15) + 12(n-15) = 0$, tj. $(n-15)(n+12) = 0$. (Isto tako ova jednadžba može se riješiti nadopunom do potpunog kvadrata.) .... 4 boda

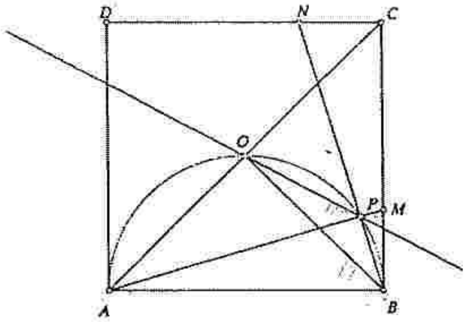
Pozitivno rješenje jednadžbe dobivamo iz $n - 15 = 0$, tj. $n = 15$. Prema tome, 4800 kuna valja razdijeliti na 15 osoba. .... 2 boda
UKUPNO 10 bodova

4.



Skica .... 1 bod
Pokažimo najprije da je $\triangle ABE \cong \triangle BCF$. Naime, imamo $|AB| = |BC|$, $\angle BAE = \angle BCF = 90°$ i $\angle EBA = \angle CBF$ jer su to kutovi sa okomitim kracima ($BE \perp BF$ i $BA \perp BC$), iz čega slijedi da je $|BE| = |BF|$, a to znači da je pravokutni trokut EBF jednakokračan. .... 4 boda
Kako je $P(EBF) = \frac{|BF|^2}{2}$, slijedi da je $\frac{|BF|^2}{2} = 200$, tj. $|BF|^2 = 400$. .... 2 boda
Iz $P(ABCD) = |BC|^2$ slijedi da je $|BC|^2 = 256$. .... 1 bod
Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut BCF lako odredimo traženu duljinu $|CF|$. Naime, imamo $|CF|^2 = |BF|^2 - |BC|^2$, odnosno $|CF|^2 = 144$, tj. $|CF| = 12$. .... 2 boda
UKUPNO 10 bodova

5. Skica .... 1 bod



Lako se pokaže da je $\triangle ABM \cong \triangle BCN$, jer je $|AB| = |BC|$, $|BM| = |CN|$ i $\angle ABM = \angle BCN = 90^\circ$, iz čega slijedi da je $\angle AMB = \angle BNC$. .... 2 boda
Kako trokuti BPM i BCN imaju dva para jednakih kutova, slijedi da imaju jednak i treći kut, odnosno da je $\angle BPM = \angle BCN = 90^\circ$, tj. $\angle BPM = \angle APN = 90^\circ$ (vršni kutovi). .... 2 boda
Zbog $\angle AOB = \angle APB = 90^\circ$, a prema Talesovom poučku, slijedi da točke A, B, P, O leže na kružnici s promjerom $\overline{AB}$. .... 2 boda
Očito je $\angle ABO = 45^\circ$ (svojstvo dijagonale kvadrata), pa je prema poučku o obodnim kutovima $\angle ABO = \angle APO = 45^\circ$, jer su to obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{AO}$, a zbog $\angle APN = 90^\circ$ zaključujemo da je i $\angle OPN = 45^\circ$, a to znači da je pravac PO simetrala kuta $\angle APN$. .... 3 boda

UKUPNO 10 bodova