MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Kraljevica, 16. - 19. svibnja 1996. godine

I. razred

1. Dokažite da je izraz

$$a^4 - 10a^2 + 9$$

djeljiv s 1920 za svaki prosti broj $a > 5$.

2. Brojevi a, b, c, d zadovoljavaju relaciju $a + b + c + d = 0$. Neka je $S_1 = ab + bc + cd$ i $S_2 = ac + ad + bd$. Pokažite da je

$$5S_1 + 8S_2 \leq 0 \quad \text{i} \quad 8S_1 + 5S_2 \leq 0.$$

3. Zadan je konveksan peterokut $ABCDE$. Neka su M, N, P, Q redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ te neka su R i S polovišta dužina $\overline{MP}$ i $\overline{QN}$. Pokažite da je

$$|SR| = \frac{1}{4}|AE|.$$

4. Četiri kružnice polumjera a sa središtima u vrhovima kvadrata stranice duljine a, dijele taj kvadrat na devet područja. Odredite površinu svakog od pojedinih područja ako je dana površina Q kvadrata, površina K kruga polumjera a i površina T jednakostraničnog trokuta duljine stranice a.

Rješenja za prvi razred

Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Dani izraz se faktorizira u oblik

$$a^4 - 10a^2 + 9 = (a^2 - 1)(a^2 - 9) = (a-3)(a-1)(a+1)(a+3) \quad \text{i}$$

$$1920 = 5 \cdot 3 \cdot 2^7.$$

U gornjem produktu su četiri uzastopna parna broja od kojih su dva djeljiva sa 4 i jedan sa 8. Zato je njihov produkt djeljiv sa $2^7 = 128$.

Od četiri uzastopna parna broja barem jedan je djeljiv s 3.

Kako a nije djeljiv s 5, onda je točno jedan od brojeva $a-3$, $a-1$, $a+1$, $a+3$ djeljiv s 5.

Zato broj 1920 dijeli dani izraz.

2.

$$5S_1 + 8S_2 = 8(S_1 + S_2) - 3S_1 = 8(ab + bc + cd + ac + ad + bd) - 3S_1$$

$$= 8 \cdot \frac{(a+b+c+d)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{2} - 3S_1 = -4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 3S_1.$$

Na isti način je

$$8S_1 + 5S_2 = -4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 3S_2.$$

Zato je

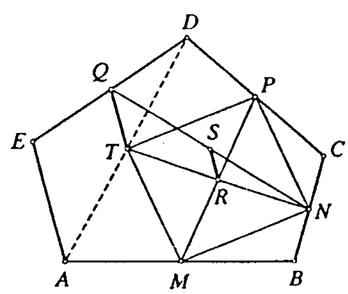
$$5S_1 + 8S_2 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3S_1 \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3}{2}[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2] + \frac{5}{2}(a^2 + d^2) + b^2 + c^2 \geq 0.$$

Na isti način se dobiva

$$8S_1 + 5S_2 \leq 0.$$

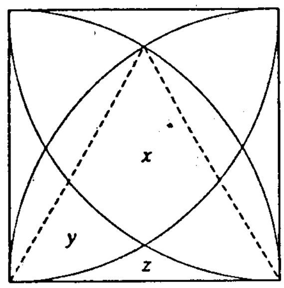
3.



Neka je T polovište dužine $\overline{AD}$. Četverokut $MNPT$ je paralelogram, jer su mu stranice srednjice odgovarajućih trokuta. Stoga je točka R je sjecište i polovište dijagonala $\overline{PM}$ i

$\overline{TN}$. Dužina $\overline{SR}$ je srednjica trokuta QTN. Zato je $|SR| = \frac{1}{2}|QT|$. Isto tako iz $\triangle AED$ je $|QT| = \frac{1}{2}|EA|$. Dakle, $|SR| = \frac{1}{4}|AE|$.

4.



Treba odrediti površine x, y, z. Imamo ove jednadžbe:

$$x + 4y + 4z = Q,$$

$$x + 3y + 2z = \frac{K}{4},$$

$$x + 2y + z = \frac{K}{3} - T,$$

od kojih su prve dvije očigledne, a u trećoj je desna strana dobivena kao zbroj $T + 2(\frac{K}{6} - T)$ površina pravilnog trokuta i kružnih odsječaka uz njegove dvije stranice. Pomnožimo li jednadžbe redom s 1, -4, 4, zatim s -1, 3, -2 i napokon s 1, -2, 1, te ih zbrojimo, dobivamo

$$x = Q - 4T + \frac{K}{3},$$

$$y = 2T - Q + \frac{K}{12},$$

$$z = Q - T - \frac{K}{6}.$$

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Kraljevica, 16. - 19. svibnja 1996. godine

II. razred

1. Ako funkcija f zadovoljava uvjete

   (a) $f(1) = 1$,

   (b) $f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$,

   (c) $f(\frac{1}{x}) = \frac{f(x)}{x^2}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad x \neq 0$,

   koliko je $f(\sqrt{1996})$?

2. Za koje realne brojeve a, b su moduli svih korijena jednadžbe $z^3 + az^2 + bz - 1 = 0$ jednaki 1?

3. Neka je $A_1A_2A_3A_4$ konveksan četverokut, S sjecište njegovih dijagonala. Označimo sa s_k površinu trokuta A_kSA_{k+1}, $(A_5 = A_1)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Dokažite da je

$$s_2^2 = s_1 s_3 \quad \text{i} \quad 2s_4 = s_1 + s_3$$

   ako i samo ako je $A_1A_2A_3A_4$ paralelogram.

4. Neka je $\overline{OA}$ polumjer i $\overline{OB}$ tetiva kružnice k polumjera R, C sjecište pravca OB i tangente na k u točki A, T točka na dužini $\overline{OB}$ takva da je $|OT| = |BC|$ i T' projekcija od T na $\overline{OA}$. Izrazite $y = |T'T|$ kao funkciju od $x = |OT'|$.

Rješenja za drugi razred
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Prema uvjetu (c) je

$(\frac{x}{x+1})^2 f(\frac{x+1}{x}) = f(\frac{x}{x+1}), \quad x \neq -1, x \neq 0,$

$(\frac{x}{x+1})^2 f(1+\frac{1}{x}) = f(1-\frac{1}{x+1}),$ pa je zbog (b),

$(\frac{x}{x+1})^2 [f(1) + f(\frac{1}{x})] = f(1) + f(-\frac{1}{x+1}).$

Vrijedi $f(x+0) = f(x) + f(0)$, tj. $f(0) = 0$.
Nadalje, $0 = f(x-x) = f(x) + f(-x)$ tj. $f(-x) = -f(x)$.
Dakle,

$(\frac{x}{x+1})^2 [1 + f(\frac{1}{x})] = 1 - f(\frac{1}{x+1})$

$(\frac{x}{x+1})^2 [1 + \frac{f(x)}{x^2}] = 1 - \frac{f(x+1)}{(x+1)^2} \quad / \cdot (x+1)^2$

$x^2 + f(x) = (x+1)^2 - f(x) - 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$

Zaista, ta funkcija zadovoljava sve uvjete. Zato je $f(\sqrt{1996}) = \sqrt{1996}$.

2. Koeficijenti polinoma su realni. Polinom je trećeg stupnja pa je jedna njegova nul-točka realna, a druge dvije su općenito kompleksno-konjugirani brojevi. Stavimo $z_1 = \gamma$, $z_2 = \alpha + i\beta$, $z_3 = \alpha - i\beta$, gdje su $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ i vrijedi $\alpha^2 + \beta^2 = |z_1|^2 = 1$. Faktorizacija polinoma glasi

$$z^3 + az^2 + bz - 1 = (z-\gamma)(z-\alpha-i\beta)(z-\alpha+i\beta)$$
$$= (z-\gamma)(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2) = (z-\gamma)(z^2 - 2\alpha z + 1)$$

Vidimo da je $\gamma = 1$

$$= (z-1)(z^2 - 2\alpha z + 1) = z^3 - (2\alpha+1)z^2 + (2\alpha+1)z - 1$$

odavde zaključujemo da mora biti

$$a = -(2\alpha+1), \quad b = 2\alpha + 1 = -a$$

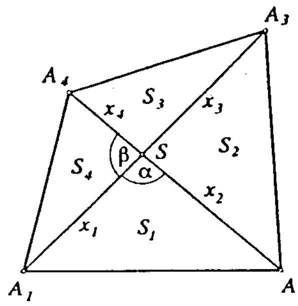
Kako je $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, za α vrijedi $-1 \leq \alpha \leq 1$ pa je $-3 \leq a \leq 1$.

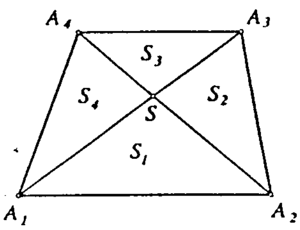
Obratno, za svaki ovakav a i $b = -a$, stavimo

$\alpha = \frac{-a-1}{2}$, $\beta = \sqrt{1-\alpha^2}$. Ovi su brojevi realni, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ a $z_1 = 1$, $z_2 = \alpha + i\beta$, $z_3 = \alpha - i\beta$ su nul-točke polinoma modula 1.

3. Pretpostavimo da vrijede dane jednakosti. Tada iz $s_2^2 = s_1 s_3$ slijedi $\frac{s_1}{s_2} = \frac{s_2}{s_3}$, tj.

$$\frac{x_1 x_2 \sin\alpha}{x_2 x_3 \sin\beta} = \frac{x_2 x_3 \sin\beta}{x_3 x_4 \sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{x_3} = \frac{x_2}{x_4}, \quad (\text{jer je } \alpha + \beta = 180°).$$





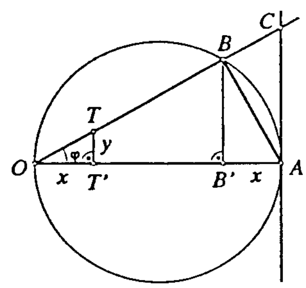
Kako trokuti A_1SA_2 i A_3SA_4 imaju jednaki kut uz vrh S i jednaki omjer duljina stranica, oni su slični. Zato im se podudaraju i preostali kutovi. Posebno iz

$\angle A_3A_1A_2 = \angle A_1A_3A_4 \quad \Rightarrow \quad A_1A_2 \parallel A_3A_4$.

Sada je $s_2 = s_4$ pa mora biti $s_1 = s_3$, radi jednakosti geometrijske i aritmetičke sredine. Trokuti SA_1A_2 i SA_3A_4 su slični, pa ako su im površine jednake, oni su sukladni. No, to je moguće samo ako je $|A_1S| = |A_3S|$ i $|A_2S| = |A_4S|$. Zato je četverokut paralelogram.

Obrat je jasan.

4.



Uz oznake kao na slici je $x = |OT|\cos\varphi$, $y = |OT|\sin\varphi$. (Možemo pretpostaviti da je $y > 0$.)

Nadalje,

$|OT| = |OC| - |OB| = \frac{2R}{\cos\varphi} - 2R\cos\varphi = 2R\frac{\sin^2\phi}{\cos\varphi}$.

Sada je $x = 2R\sin^2\varphi$, odakle se dobiva

$$y = x \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \sin\varphi = \sqrt{\frac{x}{2R}}, \quad \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{x}{2R}},$$

i napokon

$$y = x \cdot \sqrt{\frac{x}{2R - x}}.$$

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. - 19. svibnja 1996. godine

III. razred

1. Dokažite da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost

$$\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x \leq 2.$$

Kada vrijedi jednakost?

2. Neka su h_1, h_2, h_3 duljine visina trokuta ABC na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, redom, a u, v, w udaljenosti točke M iz unutrašnjosti trokuta od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Dokažite:

$$\frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v} + \frac{h_3}{w} \geq 9,$$

$$h_1 h_2 h_3 \geq 27uvw,$$

$$(h_1 - u)(h_2 - v)(h_3 - w) \geq 8uvw.$$

3. Pravilna četverostrana piramida presječena je ravninom koja prolazi jednim vrhom baze i okomita je na nasuprotni pobočni brid. Površina presjeka dvaput je manja od površine baze. Odredite prikloni kut pobočnog brida i baze.

4. Neka su α i β pozitivni iracionalni brojevi takvi da je $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$, te $A = \{[n\alpha] | n \in \mathbf{N}\}$ i $B = \{[n\beta] | n \in \mathbf{N}\}$. Dokažite da je tada $A \cup B = \mathbf{N}$ i $A \cap B = \emptyset$.

   Naputak: Možete dokazati ekvivalentnu tvrdnju: Za funkciju $\pi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ definiranu sa

   $\pi(m) = \mathrm{Card}\{k | k \in \mathbf{N}, k \leq m, k \in A\} + \mathrm{Card}\{k | k \in \mathbf{N}, k \leq m, k \in B\}$

   vrijedi $\pi(m) = m, \quad \forall m \in \mathbf{N}$.

   ($[x]$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

Rješenja zadataka za treći razred
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

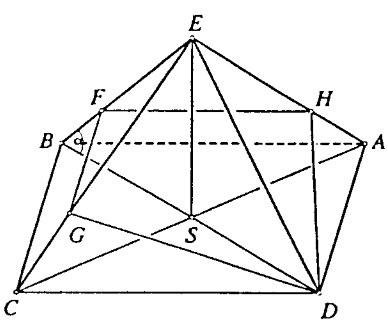
1. $\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x \le \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^4 x = 2\sin^4 x + (1-\sin^2 x)^2$
$= 3\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1 = 3(\sin^2 x - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3} \le 3\cdot(1-\frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3} = 2.$
Da bi vrijedila jednakost moraju svugdje biti jednakosti, tj.
$\sin^5 x = \sin^4 x, \quad \cos^5 x = \cos^4 x, \quad \sin^2 x = 1.$
Iz $\sin^4 x(\sin x - 1) = 0$ i $\sin^2 x = 1$ slijedi $\sin x = 1$.
Dakle, jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

2. (a) U nejednakost $(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \ge 9$, koja vrijedi zbog
$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) = 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \ge 3+2+2+2 = 9$,
uvrsti se $x = P(\triangle BCM) = P_1$, $y = P(\triangle CAM) = P_2$, $z = P(\triangle ABM)$ i dobije
$\frac{P}{P_1} + \frac{P}{P_2} + \frac{P}{P_3} \ge 9$ gdje je $P = P(\triangle ABC) = P_1 + P_2 + P_3$, odakle je $\frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v} + \frac{h_3}{w} \ge 9$.
(b) Uvrstivši $h_1 = \frac{uP}{P_1}$, $h_2 = \frac{vP}{P_2}$, $h_3 = \frac{wP}{P_3}$ nejednakost postaje $P^3 \ge 27P_1P_2P_3$ koja je zadovoljena zbog $\frac{P_1+P_2+P_3}{3} \ge \sqrt[3]{P_1P_2P_3}$.
(c) Kao pod (b) uvrštavajući za h_1, h_2, h_3 imamo
$(\frac{uP}{P_1} - u)(\frac{vP}{P_2} - v)(\frac{wP}{P_3} - w) \ge 8uvw$,
odnosno $(\frac{P}{P_1} - 1)(\frac{P}{P_2} - 1)(\frac{P}{P_3} - 1) \ge 8$,

što se svodi na $\frac{P_2+P_3}{P_1} \cdot \frac{P_1+P_3}{P_2} \cdot \frac{P_1+P_2}{P_3} \ge 8$

i konačno $\frac{P_1}{P_2} + \frac{P_2}{P_1} + \frac{P_2}{P_3} + \frac{P_3}{P_2} + \frac{P_1}{P_3} + \frac{P_3}{P_1} + 2 \ge 2+2+2+2 = 8$.

3.



Neka je presjek ravnine kroz D okomite na BE s piramidom, četverokut $DHFG$. Traži se kut $\alpha = \angle EBD$. Označimo s a duljinu brida osnovice, a S je njezino središte. Sada vrijedi:
$BE \perp FG, \quad BE \perp FH, \quad$ i $\quad BE \perp FD$, pa je
$|FD| = |BD|\sin\alpha = a\sqrt{2}\sin\alpha$ (1)
$|BF| = |BD|\cos\alpha = a\sqrt{2}\cos\alpha$ (2)
$|CE| = |BE| = \frac{|BS|}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}|BD|}{\cos\alpha} = \frac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha}.$ (3)

Označimo kut $\angle CEB$ pobočke pri vrhu s β. Iz $\triangle BCE$ je
$|BC|^2 = |BE|^2 + |CE|^2 - 2|BE|\cdot|CE|\cdot\cos\beta$ pa je zbog (3) i $|BC| = a$
$\cos\beta = \sin^2\alpha$.

Nadalje je $|EF| = |BE| - |BF| = \{\text{zbog (2) i (3)}\} = -\frac{a\cos 2\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha}$.
Iz pravokutnog trokuta EFG je $|EG| = \frac{|EF|}{\cos\beta} = -\frac{a\cos 2\alpha}{\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\alpha}$ (4)
Trokuti EFG i EFH su pravokutni, imaju zajedničku katetu $\overline{FE}$ i jednake kutove $\beta = \angle FEG = \angle FEH$. Slijedi, $|EG| = |EH|$, a kako je trokut AEC jednakokračan, $GH \parallel AC$. Nadalje, $ES \perp AC$, pa je $ES \perp GH$. Pravci ES i FD leže u ravnini EBD i sijeku se. Ortogonalna projekcija vrha E na ravninu $FGDH$ je F, pa i projekcija pravca ES na tu ravninu podudara se s pravcem FD.
Stoga je $FD \perp GH$, pa u deltoidu $FGDH$ duljina dijagonale $\overline{FD}$ je dana u (1), a $|GH|$ se određuje iz sličnosti trokuta EGH i ECA:

$$\frac{|GH|}{|AC|} = \frac{|GE|}{|CE|} \quad \Rightarrow \quad |GH| = \frac{|GE|\cdot|AC|}{|CE|} = \{\text{zbog (4) i (3)}\} = -\frac{a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Dakle, $P_{FGDH} = \frac{1}{2}|FD|\cdot|GH| = -a^2\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$.
Prema uvjetima zadatka je $P_{FGDH} = \frac{1}{2}P_{ABCD} = \frac{1}{2}a^2$, pa mora biti

$$-a^2\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}a^2 \quad \Rightarrow \quad 4\sin^2\alpha - \sin\alpha - 2 = 0.$$

Zbog $\sin\alpha > 0$ rješenje je $\sin\alpha = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $\alpha = 57°28'$.

4. Prebrojimo za koliko brojeva n vrijedi $[n\alpha] \le m$ za dani $m \in \mathbb{N}$:
Kako je $n\alpha < m+1$, to je $n < \frac{m+1}{\alpha}$, pa je $n \le [\frac{m+1}{\alpha}]$.
Isto tako, ako je $[n\beta] \le m$, onda je $n \le [\frac{m+1}{\beta}]$.
Zato je $\pi(m) = [\frac{m+1}{\alpha}] + [\frac{m+1}{\beta}] = [\frac{m+1}{\alpha}] + [(m+1)(1-\frac{1}{\alpha})]$.
Neka je $\frac{m+1}{\alpha} = l + r$, $\quad l \in \mathbb{Z}$ i $0 \le r < 1$.
Pri tome je $r \ne 0$ jer je $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
Slijedi, $\pi(m) = [\frac{m+1}{\alpha}] + [m+1-\frac{m+1}{\alpha}] = [l+r] + [m+1-l-r] = l + [r] + m - l + [1-r] = m$, jer je $[r] = 0$ i $[1-r] = 0$.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. – 19. svibnja 1996. godine

IV. razred

1. Postoji li rješenje jednadžbe

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345?$$

([x] je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

2. Za koje vrijednosti λ_1, $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ su sva rješenja jednadžbe

$$(x + i\lambda_1)^n + (x + i\lambda_2)^n = 0$$

realna? Odredite ta rješenja.

3. Odredite funkcije $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, neprekidne u nuli, koje zadovoljavaju ovu relaciju

$$f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2, \quad \text{za svako } x \in \mathbf{R},$$

gdje je $t \in (0, 1)$ dani fiksan broj.

4. Neka su α i β pozitivni iracionalni brojevi i $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, te $A = \{[n\alpha] | n \in \mathbf{N}\}$ i $B = \{[n\beta] | n \in \mathbf{N}\}$. Dokažite da je tada $A \cup B = \mathbf{N}$ i $A \cap B = \emptyset$.

Naputak: Možete dokazati ekvivalentnu tvrdnju: Za funkciju $\pi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ definiranu sa

$\pi(m) = \mathrm{Card}\{k | k \in \mathbf{N}, k \leq m, k \in A\} + \mathrm{Card}\{k | k \in \mathbf{N}, k \leq m, k \in B\}$

vrijedi $\pi(m) = m, \quad \forall m \in \mathbf{N}$.

Rješenja zadataka za 4. razred:
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Neka je $x = x_0 + r, \quad x_0 \in \mathbf{Z}, \quad 0 \le r < 1$. Tada je lijeva strana jednadžbe jednaka

$$S = 63x_0 + [2r] + [4r] + [8r] + [16r] + [32r] = 63x_0 + S_1.$$

Kako je $S_1 \ge 0$ mora biti $S_1 = 12345 - 63x_0 \ge 0$, odakle je $x_0 \le 195$ (jer je $x_0 \in \mathbf{Z}$). S druge strane je

$$S_1 = [2r] + [4r] + [8r] + [16r] + [32r] \le (2-1) + (4-1) + (8-1) + (16-1) + (32-1) = 57.$$

Iz $S_1 = 12345 - 63x_0 \le 57$ slijedi $x_0 \ge 195 \quad (x_0 \in \mathbf{Z})$.

Dakle, $x_0 = 195$, a onda je $S_1 = 12345 - 63 \cdot 195 = 60$, što je u suprotnosti s $S_1 \le 57$. Zato ova jednadžba nema rješenja.

2. Iz $|(x + i\lambda_1)^n| = |(x + i\lambda_2)^n|$ za realne x mora biti $|x + i\lambda_1| = |x + i\lambda_2|$, tj. $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$. Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, rješenja nisu sva realna. Ako je $\lambda_1 = -\lambda_2 \ (= \lambda)$, onda je

$$(x + i\lambda)^n + (x - i\lambda)^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x + i\lambda}{x - i\lambda}\right)^n = -1$$

odnosno

$$\frac{x + i\lambda}{x - i\lambda} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} = \cos\alpha_k + i\sin\alpha_k, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Odavde je

$$x_k = \frac{\lambda \sin\alpha_k - i\lambda - i\lambda\cos\alpha_k}{1 - \cos\alpha_k - i\sin\alpha_k} = \frac{\frac{\lambda\sin\alpha_k}{1-\cos\alpha_k} - i\lambda \cdot \frac{1+\cos\alpha_k}{1-\cos\alpha_k}}{1 - i \cdot \frac{\sin\alpha_k}{1-\cos\alpha_k}}$$

$$= \lambda \cdot \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2}(1 - i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2})}{1 - i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2}} = \lambda \operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} = \lambda\operatorname{ctg}\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

3. Po pretpostavci je
$f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2$, pa slično je i
$f(tx) - 2f(t^2x) + f(t^3x) = t^2x^2$
$f(t^2x) - 2f(t^3x) + f(t^4x) = t^4x^2$
....
$f(t^nx) - 2f(t^{n+1}x) + f(t^{n+2}x) = t^{2n}x^2$.
Zbrajanjem svih n jednakosti dobije se

$$f(x) - f(tx) - f(t^{n+1}x) + f(t^{n+2}x) = x^2 \cdot \frac{t^{2(n+1)} - 1}{t^2 - 1}.$$

Prelaskom na limes kada $n \to \infty$ ove jednakosti, zbog neprekidnosti od f u 0, dobije se

$$f(x) - f(tx) = \frac{x^2}{1-t^2}.$$

Ponavljajući postupak, zbog neprekidnosti funkcije f u 0 (tj. $\lim_{n\to\infty} f(t^n x) = f(0)$), dobivamo

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-t^2)^2} + f(0).$$

Svaka funkcija oblika $f(x) = \frac{x^2}{(1-t^2)^2} + a, \quad a \in \mathrm{R}$ zadovoljava uvjete.

4. Prebrojimo za koliko brojeva n vrijedi $[n\alpha] \leq m$ za dani $m \in \mathrm{N}$:
Kako je $n\alpha < m+1$, to je $n < \frac{m+1}{\alpha}$, pa je $n \leq [\frac{m+1}{\alpha}]$.
Isto tako, ako je $[n\beta] \leq m$, onda je $n \leq [\frac{m+1}{\beta}]$.
Zato je $\pi(m) = [\frac{m+1}{\alpha}] + [\frac{m+1}{\beta}] = [\frac{m+1}{\alpha}] + [(m+1)(1-\frac{1}{\alpha})]$.
Neka je $\frac{m+1}{\alpha} = l + r, \quad l \in \mathrm{Z}$ i $0 \leq r < 1$.
Pri tome je $r \neq 0$ jer je $\alpha \in \mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}$.
Slijedi, $\pi(m) = [\frac{m+1}{\alpha}] + [m+1-\frac{m+1}{\alpha}] = [l+r] + [m+1-l-r] = l + [r] + m - l + [1-r] = m$, jer je $[r] = 0$ i $[1-r] = 0$.