

**DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
REPUBLIKE HRVATSKE**

1997. godina

VII. RAZRED

1. Riješi sustav jednačbi:

$$x - y - z = 6$$

$$2x - 2y + 2z = 3$$

$$3x + 3y - 3z = 2.$$

2. Riješi jednačbu $x + x + 1 + x + 2 + \dots + x + 44 = 1993 + 1995 + 1997$.

3. Koliko je ukupno trokuta određeno vrhovima konveksnog deseterokuta?

4. Dan je šiljasti kut $\sphericalangle DCE$ i točka M unutar tog kuta koja ne leži niti na jednom kraku. Na kraku CD konstruiraj točku A, a na kraku CE točku B, tako da točka M dijeli dužinu \overline{AB} u omjeru $|AM| : |MB| = 2 : 3$.

5. U trokutu ABC je $\sphericalangle BAC = 42^\circ$. Okomica vrhom A na simetralu unutarnjeg kuta $\sphericalangle BAC$ siječe pravac BC u točki M, tako da je $|BM| = |AB| + |AC|$, pri čemu točka C leži između točaka B i M. Odredi veličine ostalih dvaju kutova trokuta ABC.

DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA REPUBLIKE HRVATSKE
1997. godina
VII. RAZRED

Rješenja zadataka

1. $x = \frac{13}{12}$, $y = \frac{10}{3}$, $z = \frac{15}{4}$.

2. Zadana se jednačina može napisati u obliku

$$45x + (1 + 2 + \dots + 44) = 5985.$$

Njezino je rješenje $x = 111$.

3. Prvi vrh trokuta možemo odabrati na 10 načina, drugi na 9, a treći na 8 načina. Na taj je način svaki od trokuta brojen 6 puta, pa je ukupan broj trokuta koji su određeni vrhovima konveksnog deseterokuta jednak $(10 \cdot 9 \cdot 8) : 6 = 720 : 6 = 120$.

4. *Analiza.* Pretpostavimo da je zadatak riješen, tj. da smo odredili točke A i B takve da je $|AM| : |MB| = 2 : 3$. Nacrtajmo točkom M pravac p paralelan kraku CD do sjecišta N s krakom CE. Zbog sličnosti trokuta ABC i MBN zaključujemo da je $|CN| : |NB| = 2 : 3$.

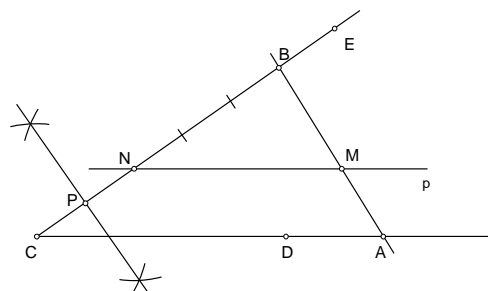
Konstrukcija:

1° Treba nacrtati pravac $p \parallel CD$ kroz točku M do sjecišta N s krakom CE.

2° Potrebno je konstruirati polovište P dužine \overline{CN} .

3° Treba odrediti točku B na kraku CE tako da je $|NB| = 3|NP|$.

4° Pravac BM siječe krak CD u točki A.



5. Pravac AM okomit na simetralu unutrašnjeg kuta $\sphericalangle BAC$ je simetrala vanjskog kuta uz vrh A. Na produžetku stranice \overline{AB} preko vrha A označena je točka D tako da je $|AD| = |AC|$.

Uočite na slici da su $\triangle ACM$ i $\triangle ADM$ sukladni (podudaraju se u dvije stranice i kutu između njih).

Zato je $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ADM$, a $\sphericalangle ACM = \alpha + \beta$.

Budući da je $|BD| = |BA| + |AD| = |BA| + |AC|$ i iz pretpostavke da je $|BM| = |AB| + |AC|$ slijedi da je $\triangle BDM$ jednakokračan i da je $\sphericalangle BDM = \sphericalangle BMD = \alpha + \beta$.

U trokutu BDM vrijedi $\alpha + 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$, pri čemu je $\alpha = 42^\circ$. Odatle je $\beta = 32^\circ$, a treći je kut trokuta ABC 106° .

