DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
REPUBLIKE HRVATSKE

1997. godina

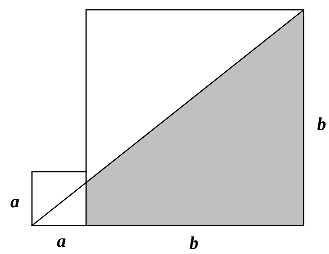
VIII. RAZRED

1. Odredi sve cijele brojeve a, b i c za koje vrijede jednakosti:
   $a^2 + 2b^2 - 2bc = 121$ i $2ab - c^2 = 121$.

2. Za kupovanje 18 komada jabuka valja platiti toliko kuna koliko se komada jabuka može kupiti za 2 kune. Koliko se jabuka može kupiti za 7 kuna?

3. Odredi sve troznamenkaste brojeve koji imaju svojstvo da je umnožak svakog od tih brojeva sa 6 isto troznamenkasti broj kojemu je zbroj znamenaka jednak zbroju znamenaka početnog troznamenkastog broja.

4. Dva kvadrata s duljinama stranica a i b, pri čemu je $a<b$, dani su kao na slici. Odredi omjer $a:b$ duljina stranica kvadrata, ako je površina osjenčanog dijela jednaka 60% površine većeg kvadrata.



5. Na kružnici su redom istaknute točke A, B, D, E, C u smjeru gibanja kazaljke na satu, pri čemu je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDE = 45°$. Dokaži da je $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DE|^2$.

DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA REPUBLIKE HRVATSKE
1997. godina
VIII. RAZRED

Rješenja zadataka

1. $a = b = c = 11$ ili $a = b = c = -11$.

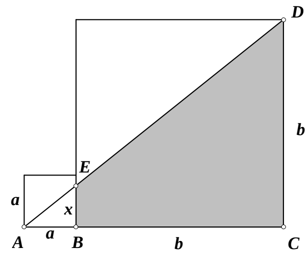
2. Označimo li sa x broj kuna koje se plate za 18 jabuka, odnosno broj jabuka koje se mogu kupiti za 2 kune, zaključujemo da je cijena jedne jabuke $\frac{x}{18}$, odnosno $\frac{2}{x}$ kuna. Dakle, $\frac{x}{18}=\frac{2}{x}$, pa je $x=6$. Za 1 kunu mogu se kupiti 3 jabuke, a za 7 kuna 21 jabuka.

3. Neka je $\overline{abc}$ traženi troznamenkasti broj, pri čemu je a=1, b$\le$6 (u suprotnom je slučaju umnožak sa 6 četveroznamenkast). Umnožak $\overline{1bc}\cdot 6$ je djeljiv s 3, pa je i broj $\overline{1bc}$ djeljiv sa 3 (imaju jednake zbrojeve znamenaka). To znači da je $\overline{1bc}\cdot 6$ djeljiv s 9, pa zaključujemo da je i $\overline{1bc}$ djeljiv s 9. Budući da je b$\le$6, to je 1+b+c=9. Provjeravanjem uvjeta iz niza 108, 117, 126, 135, 144, 153 i 162 izdvajamo brojeve 117 i 135 koji zadovoljavaju sve uvjete zadatka.

4. Zbog sličnosti trokuta ACD i ABE slijedi $|AC|:|CD| = |AB|:|BE|$,

   $(a+b) : b = a : x$, $x=\frac{ab}{a+b}$. Četverokut BCDE je trapez, a njegova je površina $P=\frac{(b+x)b}{2}$, odnosno $P=\frac{b^2(2a+b)}{2(a+b)}$.

   Prema uvjetima zadatka zaključujemo da je $\frac{2a+b}{2(a+b)}=\frac{3}{5}$, odakle je $b=4a$. Dakle, $a : b = 1 : 4$.



5. Zbog pretpostavke da je $\sphericalangle$ABC = $\sphericalangle$BCD, zaključujemo da je BC presječnica para paralelnih pravaca, tj. da je $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
   Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ su tetive kojima kojima pripadaju sukladni obodni kutovi, pa su i one sukladne. Dakle, trapez ABDC je jednakokračan pa je i |AD| = |BC|. Slično se vidi i da je četverokut BCED jednakokračan trapez i da je |BE| = |CD|. Iz navedenog zaključujemo da je |AC| = |BD| = |CE|, pa je $\sphericalangle$ABC = $\sphericalangle$CBE = 45°. Dakle, $\sphericalangle$ABE = 90°, što znači da je $\overline{AE}$ promjer kružnice. Tada je i $\sphericalangle$ADE = 90°. Primjena Pitagorinog poučka na ΔABE i ΔADE,uz uvažavanje |BE| = |CD| i |AD| = |BC|, daje traženu tvrdnju.