MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko – gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
1. ožujka 1997. godine

8. razred

1. Skrati razlomak $\dfrac{a^2-16}{12+a-a^2}$.

2. Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom $A(7,2)$, tako da se duljina odsječka tog pravca na pozitivnom dijelu osi x odnosi prema ordinati točke A kao $5:3$.

3. Odredi sve dvoznamenkaste brojeve $\overline{ab}$ i $\overline{cd}$, tako da je znamenka desetica drugog broja jednaka dvostrukoj znamenci jedinica prvog broja i da je
$$\overline{ab}^2+\overline{cd}^2=\overline{ba}^2+\overline{dc}^2 .$$

4. Neka je u trapezu $ABCD$ krak $\overline{AD}$ okomit na osnovicu $\overline{AB}$, a kružnica promjera $\overline{BC}$ siječe osnovicu $\overline{AB}$ u točki H, a krak $\overline{AD}$ u točkama E i F.
Dokaži da je:
   (a) $|AH|=|CD|$,
   (b) $\triangle ABE\sim\triangle DEC$.

5. Dan je pravokutnik $ABCD$. Neka je točka M polovište stranice $\overline{AB}$, a točka E presjek dijagonale $\overline{AC}$ i dužine $\overline{DM}$. Koliki je kut $\angle CED$, ako je $|AB|:|BC|=\sqrt{2}:1$?

197 OPĆ

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ČLAN KOMISIJE JE DUŽAN I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Ako brojnik i nazivnik zadanog razlomka rastavimo na faktore, dobivamo redom:

$$\frac{a^2-16}{12+a-a^2}=\frac{(a-4)(a+4)}{12+4a-3a-a^2}=\frac{(a-4)(a+4)}{4(3+a)-a(3+a)}$$

$$=\frac{(a-4)(a+4)}{(3+a)(4-a)}=-\frac{(a-4)(a+4)}{(3+a)(a-4)}=-\frac{a+4}{a+3}$$

.... UKUPNO 10 bodova

2. Točka u kojoj traženi pravac siječe os x ima ordinatu 0, pa je apscisa te točke $y=ax+b$, $0=ax+b$, $ax=-b$, $x=-\frac{b}{a}$. 2 boda
Zato vrijedi razmjer $-\frac{b}{a}:2=5:3$, odnosno $-\frac{3b}{a}=10$, ili $10a+3b=0$. 2 boda
Očito je da koordinate točke $A(7,2)$ moraju zadovoljavati jednadžbu pravca $y=ax+b$, pa vrijedi $2=7a+b$. 2 boda
Rješenje sustava $10a+3b=0$, $7a+b=2$ su traženi parametri. $a=\frac{6}{11}$ i $b=-\frac{20}{11}$. 3 boda
Tražena jednadžba pravca je $y=\frac{6}{11}x-\frac{20}{11}$. 1 bod

.... UKUPNO 10 bodova

3. Zadanu jednakost možemo redom pisati ovako:

$$(10a+b)^2+(10c+d)^2=(10b+a)^2+(10d+c)^2\,,$$

$$100a^2+20ab+b^2+100c^2+20cd+d^2=100b^2+20ab+a^2+100d^2+20cd+c^2\,,$$

$$99a^2+99c^2=99b^2+99d^2\,,\ a^2+c^2=b^2+d^2\,,$$

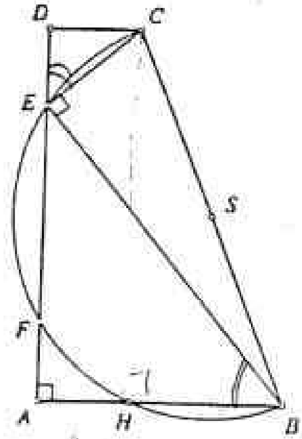
a zbog $c=2b$ imamo $a^2+4b^2=b^2+d^2$, odnosno $a^2+3b^2=d^2$ ili $3b^2=d^2-a^2$, tj. $3b^2=(d-a)(d+a)$. 2 boda
Zbog $c=2b$, znamenka b može imati jednu od vrijednosti 1,2,3,4. Zato razlikujemo četiri moguća slučaja:
1. Za $b=1$ i $c=2$ vrijedi jednakost $(d-a)(d+a)=3$, pa imamo sustav jednadžbi $d-a=1$, $d+a=3$, a rješenje je $a=1$, $d=2$. Traženi brojevi su 11 i 22. 1 bod
2. Za $b=2$ i $c=4$ vrijedi jednakost $(d-a)(d+a)=12$. Sad je očito ili faktor $d-a$ ili faktor $d+a$ djeljiv sa 2, a kako je i razlika $d+a-(d-a)=2a$ djeljiva sa 2, nužno je svaki faktor djeljiv sa 2, pa imamo sustav $d-a=2$, $d+a=6$, a rješenje sustava je $a=2$, $d=4$. Traženi su brojevi 22 i 44. 2 boda
3. Za $b=3$ i $c=6$ vrijedi jednakost $(d-a)(d+a)=27$. Očito je bar jedan faktor djeljiv sa 9, a kako su a i d znamenke, to je nužno $a+d=9$, pa imamo sustav $d-a=3$, $d+a=9$, a rješenje sustava je $a=3$, $d=6$. Traženi su brojevi 33 i 66. 2 boda
4. Za $b=4$ i $c=8$ vrijedi jednakost $(d-a)(d+a)=48$. Uvažavajući 1. slučaj da je svaki faktor paran broj i da su a i d znamenke, od 5 mogućih sustava 3 nemaju rješenje, pa imamo 2 sustava jednadžbi: $d-a=4$, $d+a=12$, odnosno $d-a=6$, $d+a=8$. Rješenja ovih sustava su $a=4$, $d=8$ i $a=1$, $d=7$. Traženi brojevi su 44 i 88, te 14 i 87. 3 boda

.... UKUPNO 10 bodova

4. (a) Kako je prema Talesovu poučku $\angle CHB=90°$, slijedi da je $CH \parallel AD$, jer je $\angle BAD=90°$, a zbog $AB \parallel CD$ zaključujemo da je četverokut $AHCD$ pravokutnik, a to znači da je $|AH|=|CD|$. 3 boda

(b) Trokut BAE i trokut EDC su dva pravokutna trokuta, $\angle BAE=\angle EDC=90°$. Kako je $\angle BEC=90°$, prema Talesovu poučku slijedi da je $\angle ABE=\angle CED$, jer su to kutovi s okomitim kracima. Naime, $BE \perp CE$ i $AB \perp DE$. Ako dva trokuta imaju dva para sukladnih kutova, slijedi da su oni slični, tj. $\triangle ABE \sim \triangle DEC$. 5 bodova

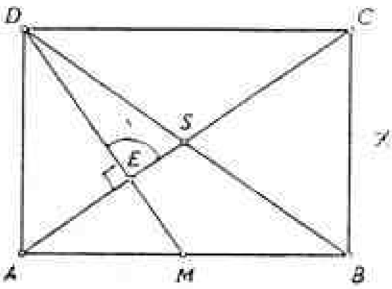
Slika



2 boda

Ukoliko je učenik označio točke E i F u drugom poretku zadatak se rješava analogno. . UKUPNO 10 bodova

5. .



1

Neka je $|BC| = |AD| = x$. Tada iz $|AB| : |BC| = \sqrt{2} : 1$ slijedi da je $|AB| = |BC| \cdot \sqrt{2}$, odnosno $|AB| = x\sqrt{2}$, pa je $|AM| = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Duljinu $|MD|$ odredimo primjenom Pitagorina poučka na trokut MAD. Naime, iz $|MD|^2 = |AM|^2 + |AD|^2$ dobivamo $|MD|^2 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + x^2$, odnosno $|MD|^2 = \frac{3x^2}{2}$, ili nakon sređivanja $|MD| = \frac{x\sqrt{6}}{2}$. 2 boda

U trokutu ABC primjenom Pitagorina poučka vrijedi $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$, ili $|AC|^2 = (x\sqrt{2})^2 + x^2$, te nakon sređivanja $|AC| = x\sqrt{3}$, pa je $|AS| = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. 2 boda

Lako se pokaže da je točka E težište trokuta ABD, a to znači da je $|AE| = \frac{2}{3}|AS|$, ili $|AE| = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}$, tj. $|AE| = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. 2 boda

Dalje možemo na razne načine. Jedan je preko obrata Pitagorina poučka, a za to nam treba $|DE| = \frac{2}{3}|MD|$, $|DE| = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{6}}{2}$, $|DE| = \frac{x\sqrt{6}}{3}$. 2 boda

Valja još pokazati da vrijedi $|AE|^2 + |DE|^2 = |AD|^2$: $\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{6}}{3}\right)^2 = x^2$, ili $\frac{x^2}{3} + \frac{2x^2}{3} = x^2$, tj. $x^2 = x^2$, iz čega slijedi da je $AE \perp DE$, tj. $\angle CED = 90°$. 2 boda

. . . . UKUPNO 10 bodova