MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
12. travnja 1997. godine

4. razred

1. Zadan je jednakokračan trokut ABC kojemu je duljina osnovice a dva puta manja od duljine kraka b.

   a) Izračunaj duljinu stranice a, ako je opseg trokuta 150 mm.

   b) Nacrtaj trokut ABC, ako mu je $\overline{AB}$ osnovica.

   c) Izračunaj duljinu stranice jednakostraničnog trokuta čiji je opseg jednak opsegu zadanog trokuta.

2. Udaljenost gradova A i B je 32 km. Ante je krenuo iz grada A u grad B u 8 sati i svakog sata prelazi 5 km. Sat kasnije iz grada B prema gradu A krenuo je Ivan koji svakog sata prelazi 4 km. U koliko će se sati oni sresti i koliko će kilometara tada biti udaljeni od grada B ?

3. Prije odlaska u kupovinu Ana i Marija imale su jednake svote novaca. Nakon kupovine, u kojoj je Ana potrošila 202 kn, a Marija 402 kn, Ani je ostalo pet puta više novaca nego Mariji. Koliko novaca su Ana i Marija imale prije kupovine ?

4. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima su znamenke desettisućica i jedinica jednake, a znamenka tisućica dva puta veća od znamenke desetica?

5. Primjenom računskih operacija $+, -, \cdot, :$ i bez uporabe zagrada prikažite brojeve

   $$10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14$$

   koristeći brojke $1, 3, 5, 7$ i 9. U svakom izrazu, svaki od brojeva $1, 3, 5, 7$ i 9 smiješ koristiti točno jednom.

   Primjer: $24 = 3 \cdot 9 + 5 - 7 - 1$.

RJEŠENJA ZA 4. RAZRED

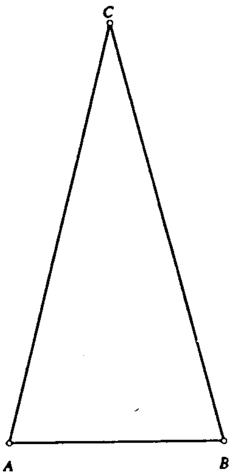
OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ČLAN KOMISIJE JE DUŽAN I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. a) Krak je dvostruko dulji od osnovice, pa je $b = 2a$. Nadalje, $O = a + b + b$, $O = a + 2a + 2a$, $O = 5a$, $150 = 5a$, $a = 150 : 5$, $a = 30$ mm .... 4 boda

b) Kako je $a = 30$ mm, to je $b = 2 \cdot 30$, tj. $b = 60$ mm
.... 2 boda

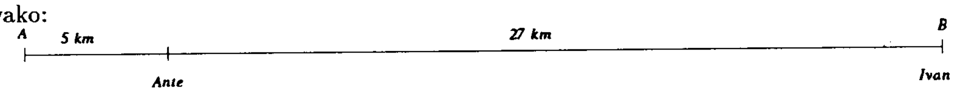
Crtež .... 2 boda

c) $O = 3 \cdot a$, $150 = 3 \cdot a$, $a = 150 : 3$, $a = 50$ mm .... 2 boda



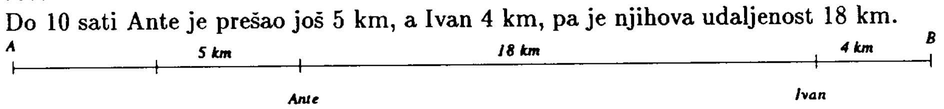
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način. U 9 sati Ante se za 5 km približio gradu B, pa tu situaciju grafički možemo prikazati ovako:



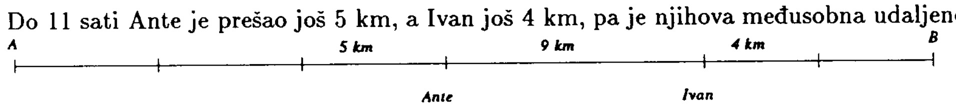
.... 1 bod

Do 10 sati Ante je prešao još 5 km, a Ivan 4 km, pa je njihova udaljenost 18 km.



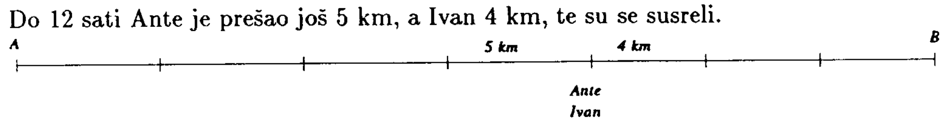
.... 2 boda

Do 11 sati Ante je prešao još 5 km, a Ivan još 4 km, pa je njihova međusobna udaljenost 9 km.



.... 2 boda

Do 12 sati Ante je prešao još 5 km, a Ivan 4 km, te su se susreli.



.... 2 boda

Ante i Ivan susrest će se u 12 sati. .... 1 bod

Od grada B bit će udaljeni 12 km. .... 2 boda

Drugi način. Nakon prvog sata Antina hoda udaljenost između Ivana i Ante smanjila se za 5 km i ona u 9 sati iznosi 27 km. .... 1 bod.

Svakog sata udaljenost između Ante i Ivana smanjuje se za 5+4=9 kilometara. .... 3 boda

Kako je $27 : 9 = 3$, Ante i Ivan susrest će se 3 sata nakon Ivanova polaska iz grada B. ...... 3 boda

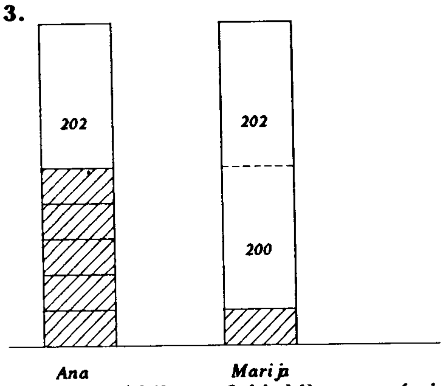
Ante i Ivan susrest će se u 12 sati. .... 1 bod

Od grada B bit će udaljeni 12 km. .... 2 boda

Postupak (bilo koji način) donosi najviše .... 7 bodova

.... UKUPNO 10 BODOVA

3.



Četverostruki Marijin ostatak jednak je 200, tj.

tj. Marijin ostatak je 50 kn.

Postupak (bilo grafički, bilo pomoću jednadžbe ili na neki drugi način) najviše .... 7 bodova
Ana i Marija su prije kupovine imale svaka po 452 kune. Točan odgovor .... 3 boda
.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Na mjestu desettisućica i jedinica može stajati jedan od brojeva $1, 2, \ldots, 9$, tj. ta dva mjesta možemo popuniti na 9 načina. .... 3 boda

Ako je znamenka tisućica T dva puta veća od znamenke desetica D, to znači da možemo imati ove kombinacije:

1. $D = 0, T = 0$;
2. $D = 1, T = 2$;
3. $D = 2, T = 4$;
4. $D = 3, T = 6$;
5. $D = 4, T = 8$,

tj. ta dva mjesta popunjavamo na 5 načina .... 3 boda

Znamenka stotica može biti bilo koji od brojeva $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, tj. možemo je popuniti na 10 načina. .... 2 boda

Traženih brojeva ima: $9 \cdot 5 \cdot 10 = 450$. .... 2 boda
.... UKUPNO 10 BODOVA

5. $10 = 1 \cdot 3 + 5 - 7 + 9$ .... 2 boda
$11 = 1 + 3 + 5 - 7 + 9$ .... 2 boda
$12 = 3 \cdot 5 - 9 + 7 - 1$ .... 2 boda
$13 = 3 \cdot 5 + 7 - 9 \cdot 1$ .... 2 boda
$14 = 3 \cdot 5 - 9 + 7 + 1$ .... 2 boda

Ovo su samo neki od mogućih prikaza. Učeniku **se moraju** priznati i druga točna rješenja.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
12. travnja 1997. godine

5. razred

1. Umnožak dva prirodna broja je 1728, a njihov najveći zajednički djeljitelj je 12. Koji su to brojevi ?

2. Ako brojeve 1199 i 1391 podijelimo s istim brojem dobivamo ostatak 10, odnosno 28. S kojim brojem smo podijelili zadane brojeve ?

3. Koliko ima troznamenkastih brojeva djeljivih sa 5 kojima je zbroj znamenke desetice i znamenke stotice jednak 12 ?

4. Svaki od trojice dječaka kojima su imena Ivan, Ante i Darko, ima izvjestan broj samoljepljivih sličica. Prvo je Ivan dao drugoj dvojici od svojih sličica onoliko koliko je već svaki od njih imao. Zatim je Ante dao ostaloj dvojici onoliko svojih sličica koliko je svaki od njih imao. Na kraju je i Darko ponovio postupak, tj. ostaloj je dvojici dao onoliko sličica koliko je svaki od njih imao. Poslije toga je svaki imao po 80 sličica. Koliko je samoljepljivih sličica imao svaki od trojice dječaka na početku ?

5. Nacrtaj tri točke A, B i C koje ne leže na istom pravcu. Konstruiraj točku koja je jednako udaljena od svih triju točaka A, B i C.

RJEŠENJA ZA 5. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ČLAN KOMISIJE JE DUŽAN I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka su a i b traženi brojevi. Kako je $D(a,b) = 12$, to znači da su i a i b djeljivi sa 12, tj. oblika su $a = 12m$ i $b = 12n$ i m i n nemaju zajedničkih djeljitelja osim 1, tj. relativno su prosti. ..... 4 boda

Sada je $1728 = a \cdot b = 12m \cdot 12n$, tj. $mn = 12$. Rastavi broja 12 na dva relativno prosta faktora su: $1 \cdot 12$, te $3 \cdot 4$. .... 4 boda

Traženi brojevi su 12 i 144, te 36 i 48. .... 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Ako broj 1199 smanjimo za 10 i broj 1391 smanjimo za 28, dobit ćemo dva broja koja su djeljiva istim brojem.

Znači traženi broj dijeli i 1189 i 1363 i veći je od 28 jer je jedan od ostataka bio 28. .... 5 boda

Rastavi brojeva 1189 i 1363 na proste faktore glase:

$1189 = 29 \cdot 41$ i $1363 = 29 \cdot 47$ .... 3 boda.

Traženi broj je 29. .... 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Ako je troznamenkasti broj $\overline{abc}$ djeljiv s 5, tada mu je znamenka jedinica 0 ili 5, tj. znamenku c možemo napisati na dva načina. .... 2 boda

Za znamenke a i b vrijedi $a + b = 12$. .... 2 boda

Dakle, za a i b imamo ovih 7 mogućnosti:

a	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3

.... 4 boda

Traženih troznamenkastih brojeva ima $7 \cdot 2 = 14$. .... 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

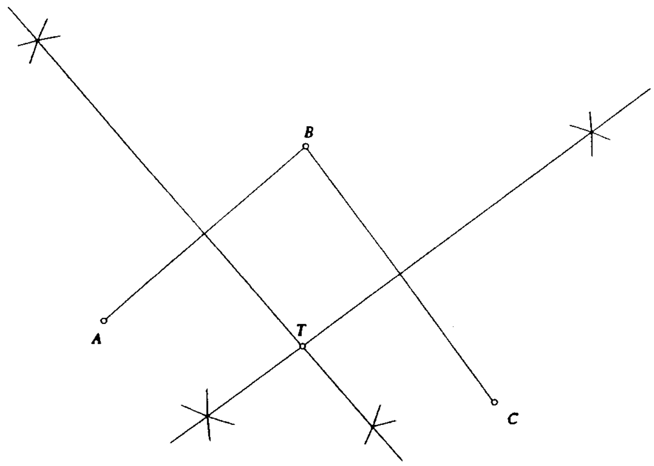
5. Crtež tri točke koje nisu na jednom pravcu. .... 1 boda

Skup točaka koje su jednako udaljene od točaka A i B je simetrala dužine $\overline{AB}$. .... 2 boda

Skup točaka koje su jednako udaljene od točaka B i C je simetrala dužine $\overline{BC}$. .... 2 boda

Presjek tih simetrala je tražena točka koja je jednako udaljena od svih triju točaka. .... 2 boda

Konstrukcija .... 3 boda



.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Riješimo ovaj zadatak unazad.

Na kraju je svaki dječak imao 80 sličica, pa je ukupno bilo 240 sličica. Svaki put kad je jedan dječak podijelio drugima sličice broj sličica druge dvojce se udvostručio. Tablica koju možemo usporedno popunjavati izgleda ovako:

Ivan	80			
Ante	80			
Darko	80			

. . . . 2 boda

U zadnjem koraku se broj Ivanovih i Antinih sličica udvostručio i postao 80. Dakle, prije nego što im je Darko dao sličice, Ante i Ivan su imali svaki po 40 sličica, a Darko 80+40+40=160 sličica.

Ivan	80	40		
Ante	80	40		
Darko	80	160		

. . . . 2 boda

Kad je Ante dao sličice Ivanu i Darku broj njihovih sličica se udvostručio i postao 40 odnosno 160. Dakle, prije nego što je Ante podijelio sličice Ivan je imao 20 sličica, Darko 80, a Ante 40+20+80=140.

Ivan	80	40	20	
Ante	80	40	140	
Darko	80	160	80	

. . . . 2 boda

I konačno, kada je u prvom koraku Ivan podijelio sličice, broj Antinih i Darkovih sličica se udvostručio i iznosio je 140 odnosno 80. Dakle, prije Ivanove podjele Ante je imao 70 sličica, Darko 40, a Ivan 20+70+40=130 sličica.

Ivan	80	40	20	130
Ante	80	40	140	70
Darko	80	160	80	40

. . . . 2 boda

Na početku je Ivan imao 130 sličica, Ante 70, a Darko 40 sličica. . . . . 2 boda

Postupak . . . . 8 bodova

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
12. travnja 1997. godine

6. razred

1. Odredi razlomak jednak razlomku $\frac{5}{7}$ kojemu je zbroj brojnika i nazivnika 1800.

2. Radnici su kopali kanal 4 dana. Prvi dan su iskopali $\frac{1}{17}$ kanala, drugi dan trostruko više nego prvi dan, treći dan za 60 m više nego drugi dan, a četvrti dan jednako kao prvi i drugi dan zajedno. Koliko je dug kanal ?

3. Voćar je na tržnicu donio 258 kg jabuka od kojih je taj dan prodao jedan dio. Da je prodao još 15 kg jabuka, ostala bi mu šestina ukupne količine jabuka. $\frac{3}{8}$ prodanih jabuka i još 5 kg prodao je prijepodne po cijeni od 3.50 kuna po kilogramu. Poslijepodne je povisio cijenu i za jabuke prodane poslijepodne dobio je $1\frac{5}{7}$ puta više nego za jabuke prodane prijepodne.

   Po kojoj cijeni je voćar poslijepodne prodavao jabuke ?

4. U pravokutniku $MNPQ$ povučena je okomica $\overline{NE}$ na dijagonalu $\overline{MP}$, $E \in \overline{MP}$. Ako je $\sphericalangle PMN = 34°$, kolika je mjera kuta $\sphericalangle QNE$?

5. U trokutu ABC točka P je polovište stranice $\overline{BC}$. Iz vrhova B i C spuštene su okomice na pravac AP koje taj pravac sijeku u točkama D i E. Dokaži da je $\overline{BE} \cong \overline{DC}$.

RJEŠENJA ZA 6. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ČLAN KOMISIJE JE DUŽAN I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

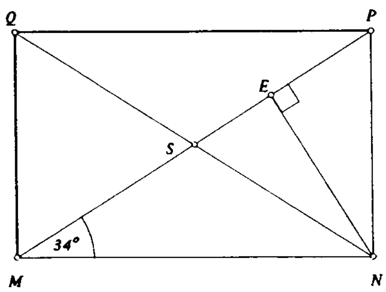
1. Prvi način. Neka je $\frac{a}{b}$ traženi razlomak. Tada je $\frac{a}{b}=\frac{5}{7}$, tj. $a=\frac{5}{7}b$. ....2 boda
Zbroj brojnika i nazivnika je 1800, tj.
$a+b=1800$, $\frac{5}{7}b+b=1800$, $\frac{12}{7}b=1800$, $b=\frac{1800\cdot 7}{12}=1050$. ....4 boda
$a=1800-b=1800-1050=750$. ....2 boda
Traženi razlomak je $\frac{750}{1050}$. ....2 boda

Drugi način. Traženi razlomak dobivamo proširivanjem razlomka $\frac{5}{7}$, tj. on ima oblik $\frac{5m}{7m}$. ... 3 boda
Zbroj brojnika i nazivnika je 1800, tj. $5m+7m=1800$, $12m=1800$, $m=150$. ....5 bodova
Traženi razlomak je $\frac{5\cdot 150}{7\cdot 150}=\frac{750}{1050}$. ....2 boda
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Ako sa x označimo duljinu kanala, tada su radnici prvi dan iskopali $\frac{1}{17}x$, drugi dan $3\cdot\frac{1}{17}x=\frac{3}{17}x$, treći dan $\frac{3}{17}x+60$ i četvrti dan $\frac{1}{17}x+\frac{3}{17}x=\frac{4}{17}x$. ....4 boda
Dakle, vrijedi $\frac{1}{17}x+\frac{3}{17}x+\frac{3}{17}x+60+\frac{4}{17}x=x$. ....2 boda
Ta jednadžba redom ima oblike: $\frac{11}{17}x+60=x$, $60=\frac{6}{17}x$, $x=170$. ....3 boda.
Kanal je dug 170 metara. ....1 bod.
.... UKUPNO 10 BODOVA

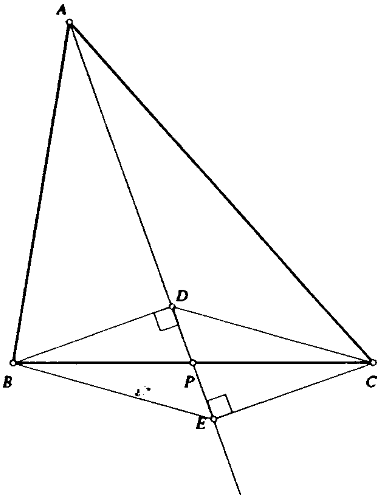
3. $\frac{1}{6}$ ukupne količine jabuka je 43 kg jabuka. Voćaru je ostalo 43+15=58 kg jabuka, tj. prodao je 200 kg jabuka. ....3 boda
$\frac{3}{8}$ prodanih jabuka je $\frac{3}{8}\cdot 200=75$ kg jabuka. Dakle, prijepodne voćar je prodao 75+5=80 kg jabuka, po cijeni 3.50 kn/kg, tj. zaradio je $80\cdot 3.5=280$ kuna. ....3 bod
Ostalo mu je $200-80=120$ kg jabuka za koje je dobio $1\frac{5}{7}\cdot 280=480$ kuna. Kako je $480:120=4$ to je cijena 1 kg jabuka poslijepodne bila 4 kn ....4 boda
.... UKUPNO 10 BODOVA

4.



Skica ....2 boda
Neka je S sjecište dijagonala pravokutnika. Tada je $\angle MNS=34°$, jer je $\triangle MNS$ jednakokračan.
..............................3 boda
U pravokutnom trokutu $\triangle MNE$ vrijedi $\angle MNE=90°-\angle EMN=90°-34°=56°$. ......3 boda
Uz to je i $\angle QNE=\angle SNE=\angle MNE-\angle MNS=56°-34°=22°$. ....2 boda
.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



Skica .... 2 boda

Trokut BPD sukladan je trokutu CPE jer je: $\overline{BP} \cong \overline{PC}$, $\sphericalangle BPD \cong \sphericalangle EPC$ (vršni kutovi), $\sphericalangle PBD = 90° - \sphericalangle BPD = 90° - \sphericalangle EPC = \sphericalangle PCE$. .... 3 boda

Iz te sukladnosti slijedi da su i ostale stranice trokuta BPD i CPE u parovima sukladne tj. $\overline{DP} \cong \overline{PE}$ i $\overline{BD} \cong \overline{EC}$. .... 2 boda

Za trokute BPE i CPD vrijedi: $\overline{BP} \cong \overline{PC}$, $\overline{PD} \cong \overline{PE}$, $\sphericalangle BPE \cong \sphericalangle DPC$ (vršni kutovi) pa prema teoremu SKS trokuti su sukladni i vrijedi $\overline{BE} \cong \overline{DC}$, što je i trebalo dokazati .... 3 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
12. travnja 1997. godine

7. razred

1. Broj knjiga na prvoj polici za 32 je manji od broja knjiga na drugoj, a za 6 je manji od broja knjiga na četvrtoj polici. Broj knjiga na prvoj i trećoj polici zajedno dva puta je manji od ukupnog broja knjiga na drugoj i četvrtoj polici.

   Koliko knjiga ima na svakoj polici, ako na drugoj polici ima 20 knjiga više nego na trećoj polici?

2. Na natjecanju iz matematike bilo je 140 učenika. Organizator natjecanja za svakog je natjecatelja pripremio po jedan sok. Sokovi su bili pakirani u paketima po 16, 17 ili 40 komada. Koliko je bilo kojih paketa?

3. Dan je pravokutni trokut ABC, pri čemu je $\sphericalangle ACB = 90°$ i $\sphericalangle BAC > \sphericalangle ABC$. Na produžetku stranice $\overline{AC}$ preko vrha C odabrana je točka D, tako da je $|BC| = |CD|$. Ako je točka E presjek stranice $\overline{BC}$ i okomice iz točke D na stranicu $\overline{AB}$ onda je trokut ACE jednakokračan pravokutan. Dokaži.

4. Konstruiraj trokut ABC ako je zadano: $a+b = 9$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.

5. U nekoj trgovini nalaze se 3 vreće riže različite klase, tako da je u jednoj vreći riža prve klase, u drugoj riža druge klase i u trećoj riža treće klase. U riži prve klase ima 0.7% slomljenih zrna riže, u riži druge klase ima 1.2% slomljenih zrna, a u riži treće klase ima 6.5% slomljenih zrna. Prodavač je iz svake vreće s rižom uzeo izvjesnu količinu riže, tako što je iz vreće s rižom druge klase uzeo dvostruko više nego što je uzeo iz vreće s rižom prve klase, a iz vreće s rižom treće klase uzeo je za 0.9 kg više nego što je uzeo iz vreće s rižom prve klase. Tako je dobio smjesu u kojoj se nalazi 3.3% slomljenih zrna. Koliku je masu riže prodavač uzeo iz vreće s rižom prve klase ?

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ČLAN KOMISIJE JE DUŽAN I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x broj knjiga na prvoj polici. Tada je $x + 32$ broj knjiga na drugoj polici, a $x + 6$ broj knjiga na četvrtoj polici. Sad je očito da na trećoj polici ima $x + 32 - 20$ knjiga, tj. $x + 12$ knjiga. 3 boda

Zato vrijedi jednadžba $2(x + x + 12) = x + 32 + x + 6$. Rješenje ove jednadžbe je $x = 7$. ....3 boda

Na prvoj polici ima 7 knjiga, na drugoj 39, na trećoj 19, a na četvrtoj 13 knjiga. ....4 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je x broj paketa sa 16 sokova, y broj paketa sa 17 sokova i z broj paketa sa 40 sokova. Tada vrijedi jednakost $16x + 17y + 40z = 140$. ....3 boda

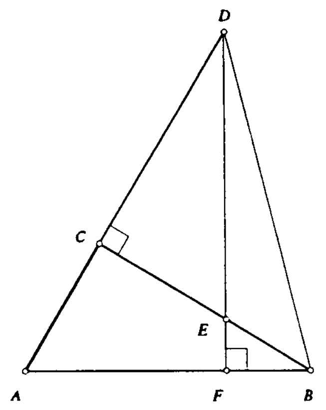
Kako su dva pribrojnika i zbroj djeljivi sa 4, to slijedi da je i pribrojnik $17y$ djeljiv sa 4, tj. $y = 4, 8, \ldots$, ali kako je $17 \cdot 8 = 136$ i pri tome jednakost $16x + 136 + 40z = 140$ nije zadovoljena niti za ikoje x i z, a za veće y pogotovo ne vrijedi, slijedi da je $y = 4$ ....3 boda

Zato vrijedi $16x + 68 + 40z = 140$, $16x + 40z = 72$, tj. $2x + 5z = 9$. Sad je nužno $z = 1$, pa je $x = 2$, $y = 4$. ....2 boda

Bilo je 2 paketa sa po 16 sokova, 4 paketa sa po 17 sokova i 1 paket sa 40 sokova. ....2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Valja pokazati da je $\triangle ACB \cong \triangle ECD$. Naime, $\measuredangle ACB = \measuredangle ECD = 90°$, $|CD| = |CB|$ i $\measuredangle ABC \cong \measuredangle EDC$, jer su to kutovi s okomitim kracima, pa to znači da je $|AC| = |CE|$, a zbog $\measuredangle ACE = 90°$ slijedi da je trokut ACE jednakokračan i pravokutan. ....8 bodova

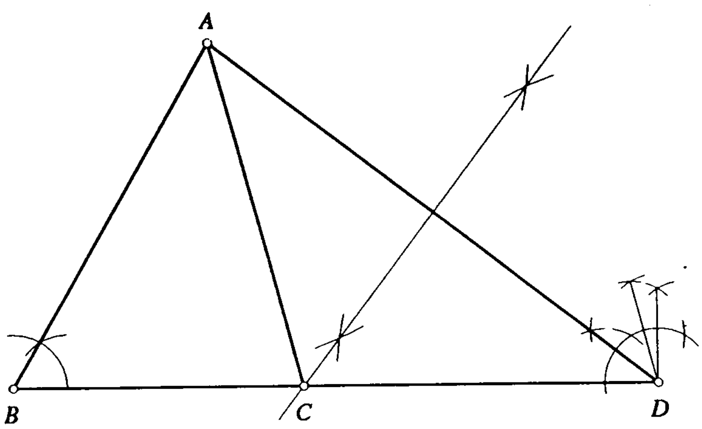


Skica ....2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Analiza. Na produžetku stranice $\overline{BC}$ preko vrha C odaberemo točku D, tako da je $|CD| = |AC| = b$. Sad je trokut ACD jednakokračan, pa je $\measuredangle CDA = \measuredangle CAD = \frac{\gamma}{2}$, jer je $\measuredangle BCA = \gamma$ vanjski kut trokuta ACD. Kako je $\alpha = 45°$ i $\beta = 60°$, to je $\gamma = 75°$, pa kut $\frac{\gamma}{2}$ možemo lako konstruirati. Sad je jasno da trokut ABD možemo konstruirati, a vrh C je presjek simetrale stranice $\overline{AD}$ i pravca BD. ......4 boda

Konstrukcija. Prvo nacrtamo dužinu $\overline{BD}$ duljine $a + b$. Kod vrha B konstruiramo kut $\beta = 60°$, a kod vrha D kut $\frac{\gamma}{2} = \frac{75°}{2}$. Presjek drugih krakova tih kutova je vrh A. Presjek simetrale stranice $\overline{AD}$ i pravca BD je vrh C. ....3 boda



Slika .... 3 boda
.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka je x broj kg riže 1. klase koju je prodavač uzeo. Tad je prodavač uzeo $2x$ kg riže druge klase i $x + 0.9$ kg riže 3. klase. Pojedinačne mase slomljenih zrna su redom $0.007x$ kg, $0.012 \cdot 2x$ kg i $0.065 \cdot (x + 0.9)$ kg. .... 3 boda

Vrijedi jednadžba $0.007x + 0.012 \cdot 2x + 0.065 \cdot (x + 0.9) = 0.033(4x + 0.9)$, tj. $x = 0.8$ ..... 6 bodova

Prodavač je uzeo 0.8 kg riže prve klase. .... 1 bod

.... UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
12. travnja 1997. godine

8. razred

1. Koja je 1997. decimala u decimalnom zapisu razlomka $\frac{71}{70}$?

2. U šiljastokutnom trokutu ABC poznate su duljine stranica $b = 17$ cm, $a = 39$ cm i duljina visine na stranicu $\overline{AB}$, tj. $v_c = 15$ cm. Izračunaj opseg tog trokuta.

3. Putnički i brzi vlak krenuli su istovremeno u 5 sati iz mjesta A u mjesto B. Brzi vlak je u mjesto B stigao u 17 sati, a putnički vlak u 20 sati. U koliko je sati svaki od vlakova prošao kroz mjesto C koje se nalazi između A i B, ako je brzi vlak kroz mjesto C prošao 2 sata prije putničkog?

4. Dana je kružnica polumjera 4 cm sa središtem u točki S. Na kružnici su odabrane redom točke A, B, C, D tako da je $\sphericalangle ASB = 90°$, $\sphericalangle BSC = 45°$, $\sphericalangle CSD = 135°$.

   Kolika je površina četverokuta $ABCD$?

5. Dan je trokut ABC, tako da je $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 12$ cm i $\sphericalangle ABC = 120°$. Simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D.

   Kolika je duljina dužine $\overline{BD}$?

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ČLAN KOMISIJE JE DUŽAN I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Dijeljenjem brojnika 71 s nazivnikom 70 dobivamo

$\frac{71}{70} = 1.0142857142857\ldots$ .... 3 boda

Taj broj je beskonačan decimalni broj kome se ponavlja skupina od 6 znamenki 142857. ..... 1 bod

Kako je prva decimala 0 koja se nikad više neće ponoviti, to je očito da valja odrediti 1996. decimalu, a zbog $1996 = 332 \cdot 6 + 4$ zaključujemo da je tražena znamenka 4. znamenka u skupini koja se ponavlja. .... 4 boda

1997. znamenka je znamenka 8. .... 2 boda

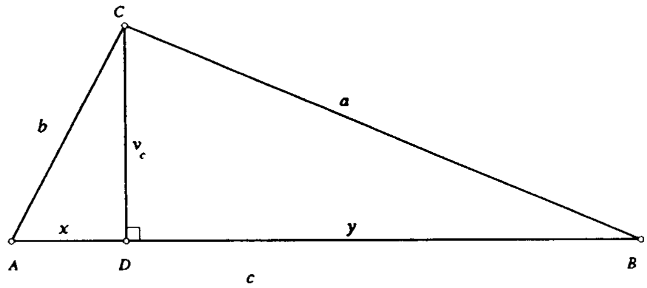
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je točka D nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ i neka je $|AD| = x$ i $|BD| = y$. Primjenom Pitagorina poučka na trokut ADC dobivamo $x^2 = b^2 - v_c^2$, $x = 8$ cm. .... 2 boda

Primjenom Pitagorina poučka na trokut BDC dobivamo $y^2 = a^2 - v_c^2$, $y = 36$ cm. .... 2 boda

Zato je $|AB| = x + y = 8 + 36 = 44$ cm. .... 2 boda

Opseg trokuta ABC je $O = a + b + c = 100$ cm. .... 2 boda



Skica .... 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je udaljenost mjesta A i B a kilometara. Tada se brzi vlak kretao brzinom $\frac{a}{12}$ km/h, a putnički brzinom $\frac{a}{15}$ km/h. Neka je x broj sati za koje je brzi vlak stigao iz mjesta A u mjesto C. Tada je putnički vlak istu udaljenost prešao za $x + 2$ sata. Sad je udaljenost od mjesta A do C jednaka $\frac{a}{12}x$ km ili $\frac{a}{15}(x + 2)$ km, pa vrijedi

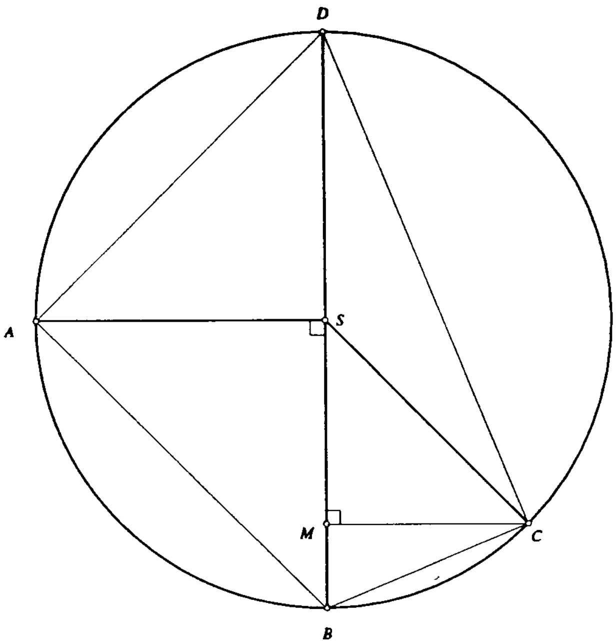
$\frac{a}{12}x = \frac{a}{15}(x + 2)$. .... 4 boda

Rješenje jednadžbe je $x = 8$. .... 4 boda.

Brzi vlak je kroz mjesto C prošao u 13 sati, a putnički u 15 sati. .... 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

4.



Skica .... 1 bod

Kako je $\sphericalangle BSC + \sphericalangle CSD = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$, slijedi da su točke B i D dvije dijametralno suprotne točke kružnice, a zbog $\sphericalangle ASB = 90^\circ$ slijedi da je i kut $\sphericalangle ASD = 90^\circ$, a to znači da je trokut ABD polovica kvadrata kojemu je duljina dijagonale $|BD| = 8$ cm. .... 1 bod

Zato je površina trokuta ABD jednaka $P(ABD) = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |AS|$, tj. $P(ABD) = 16\text{ cm}^2$. . 2 boda

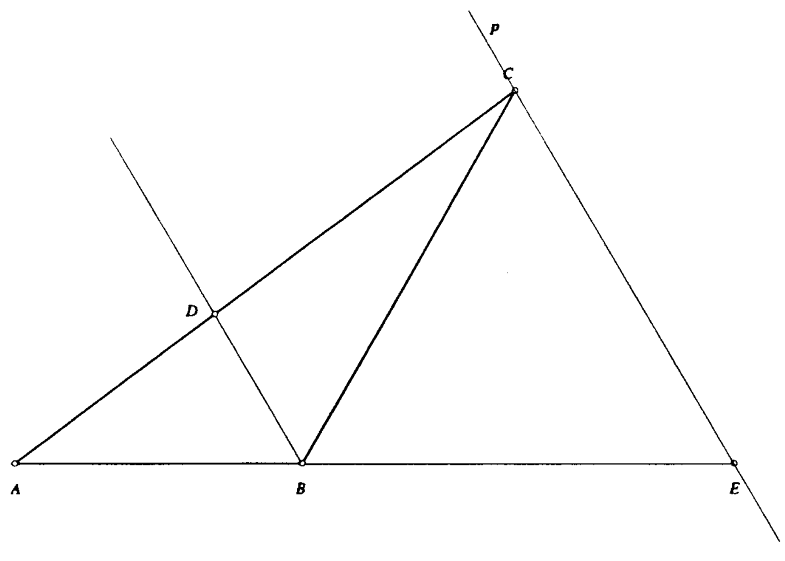
Budući da je $\overline{BD}$ promjer kružnice, po Talesovom poučku je $\sphericalangle BCD = 90^\circ$. Neka je točka M nožište okomice iz vrha C na hipotenuzu $\overline{BD}$. Tada je dužina $\overline{CM}$ visina trokuta BCD, a trokut SMC je jednakokračan i pravokutan, jer je $\sphericalangle MSC = \sphericalangle MCS = 45^\circ$, iz čega slijedi da je trokut SMC polovica kvadrata kome je dužina $\overline{SC}$ dijagonala, pa je $|SC| = |MC|\sqrt{2}$, $|MC| = 2\sqrt{2}$. ....3 boda

Zato je $P(BCD) = \frac{1}{2}|BD| \cdot |MC|$, $P(BCD) = 8\sqrt{2}\text{ cm}^2$. .... 2 boda

Prema tome, $P(ABCD) = P(ABD) + P(BCD) = (16 + 8\sqrt{2})\text{ cm}^2$. .... 1 bod

.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



Skica .... 1 bod

Vrhom C nacrtamo pravac p usporedan sa simetralom BD kuta $\sphericalangle ABC$. Neka je točka E presjek pravca p i pravca AB. .... 2 boda

Očito je $\sphericalangle CBE = 60^\circ$ jer je $\sphericalangle ABC = 120^\circ$, a zbog $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AEC = 60^\circ$ (kutovi uz presječnicu) slijedi da je trokut BCE jednakostraničan, tj. $|BC| = |BE| = |CE| = 12$. 3

Kako je $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ slijedi da je $|AB| : |BD| = |AE| : |CE|$, $8 : |BD| = 20 : 12$, tj. $|BD| = 4.8$ cm. ....4 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA