MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Novi Vinodolski, 8. - 11. svibnja 1997. godine

I. razred

1. Neka je n prirodan broj. Nađite sva rješenja jednadžbe
$$||\ldots|||x-1|-2|-3|-\ldots-(n-1)|-n|=0.$$

2. Zadani su realni brojevi $a<b<c<d$. Odredite sve mogućnosti izbora brojeva p,q,r,s za koje je $\{a,b,c,d\}=\{p,q,r,s\}$, a vrijednost izraza
$$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-s)^2+(s-p)^2$$
je najmanja.

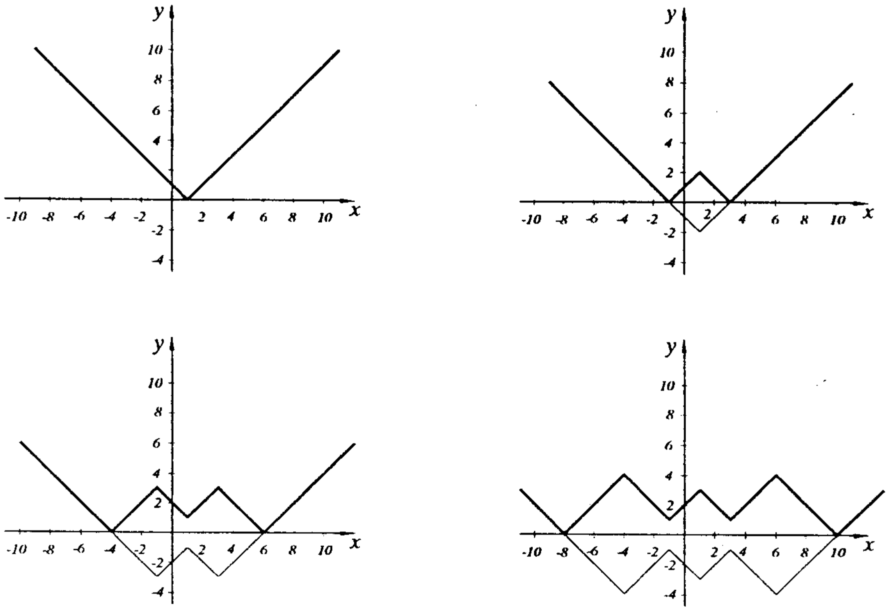
3. Zadane su kružnica i tetiva koja dijeli njezinu nutrinu na dva kružna odsječka. U njih su upisane kružnice k_1 i k_2 koje iznutra diraju kružnicu k, i danu tetivu diraju u istoj točki s raznih njezinih strana. Dokažite da je omjer polumjera kružnica k_1 i k_2 konstantan, tj. da ne ovisi o položaju zajedničkog dirališta s tetivom.

4. Na beskonačnom bijelom papiru podijeljenom na jednake kvadratiće neki od njih su obojeni crvenom bojom. U svakom 2×3 pravokutniku točno dva kvadratića su crvena. Promatrajte bilo koji 9×11 pravokutnik. Koliko u njemu ima crvenih kvadratića?

Rješenja za I. razred

Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Prvo rješenje. Promotrimo grafove funkcija $|x-1|$, $||x-1|-2|$ itd. Prva četiri grafa su (debele crte):



Pretpostavka indukcije: n-ti graf ima dvije nultočke, $n(n+1)/2$ i $2-n(n+1)/2$, između njih je vrijednost funkcije veća od 0 i manja ili jednaka n, te izvan tog područja funkcija je jednaka $y=-x-n(n+1)/2+2$, za $x<-n(n+1)/2+2$, odnosno $y=x-n(n+1)/2$, za $x>n(n+1)/2$.

Korak indukcije: graf dobiven za neki n translatiramo za $n+1$ prema dolje. Time smo dobili graf koji siječe x-os u točkama $n(n+1)/2+(n+1)=(n+1)(n+2)/2$ i $2-n(n+1)/2-(n+1)=2-(n+1)(n+2)/2$. Između tih točaka vrijednost funkcije je između $-(n+1)$ i 0 (0 ne poprima), a izvan tog područja graf je jednak grafu funkcije $y=-x-n(n+1)/2+2-(n+1)=-x-(n+1)(n+2)/2-2$, odnosno $y=x-n(n+1)/2-(n+1)=x-(n+1)(n+2)/2$. Da bismo dobili graf $(n+1)$-ve funkcije potrebno je još graf upravo opisane funkcije zrcaliti oko x-osi.

Rješenja dane jednadžbe su $\frac{n(n+1)}{2}$ i $2-\frac{n(n+1)}{2}$.

Drugo rješenje. Jednadžba ima rješenja ako i samo ako je:

$$|\ldots|||x-1|-2|-3|\ldots-(n-1)|=n.$$

Budući da je prvi pribrojnik u "vanjskoj" apsolutnoj vrijednosti uvijek pozitivan, ova jednadžba je ekvivalentna sljedećoj

$$|\ldots|||x-1|-2|-3|\ldots-(n-2)|=n+(n-1).$$

Nastavljajući postupak dolazimo do jednadžbe ponovo ekvivalentnoj polaznoj, tj.

$$|x-1|=n+(n-1)+\ldots+3+2=n(n+1)/2-1.$$

Rješenja ove jednadžbe su:

$$x_1=n(n+1)/2 \qquad x_2=-n(n+1)/2+2.$$

2. Prvo rješenje. Vidimo da traženi izraz ostaje nepromijenjen nakon kružnog pomaka i pri "čitanju unazad", npr.

$$\begin{aligned}
&(p-q)^2+(q-r)^2+(r-s)^2+(s-p)^2\\
&= (q-r)^2+(r-s)^2+(s-p)^2+(p-q)^2\\
&= (p-s)^2+(s-r)^2+(r-q)^2+(q-p)^2.
\end{aligned}$$

Zato promatramo samo bitno različite izbore brojeva a, b, c, d i odgovarajuće sume:

$$\begin{aligned}
S_1 &= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2\\
S_2 &= (a-c)^2+(c-b)^2+(b-d)^2+(d-a)^2\\
S_3 &= (a-b)^2+(b-d)^2+(d-c)^2+(c-a)^2.
\end{aligned}$$

Razlike $S_3-S_1=2(b-a)(c-d)$ i $S_3-S_2=2(c-a)(b-d)$ su obje negativne, pa zaključujemo da je S_3 najmanji od ta tri zbroja. Rješenja su $(p,q,r,s)\in\{(a,b,d,c),\ (b,d,c,a),\ (d,c,a,b),\ (c,a,b,d),\ (a,c,d,b),\ (c,d,b,a),\ (d,b,a,c),\ (b,a,c,d)\}$.

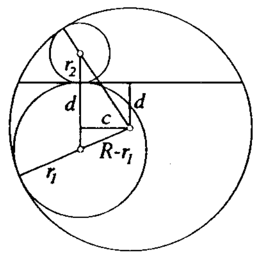
Drugo rješenje. Traženi izraz je nakon sređivanja jednak

$$2K-2(pq+qr+rs+sp)=2K-2(p+r)(q+s),$$

gdje je K suma kvadrata brojeva p,q,r,s (odnosno a,b,c,d) i ne ovisi o poretku brojeva. Trebamo naći takav izbor brojeva p,q,r,s za koji će izraz $(p+r)(q+s)$ biti maksimalan.

Ako s S označimo zbroj svih brojeva p, q, r, s (odnosno a, b, c, d), a s x vrijednost $p + r$, onda moramo naći najveću vrijednost izraza $x(S - x)$. Kao u prvom rješenju pretpostavimo da je $p = a$, pa uspoređujemo razne mogućnosti za r. Vidimo da je izraz najmanji (tj. x najbliži broju $S/2$ za koji se postiže maksimum izraza $x(S - x)$) za $r = d$. Slijedi, $q = b$ i $s = c$ ili obratno. Tako se dobivaju dva rješenja. Ostalih šest rješenja se dobiva pomakom ili uzimanjem drugih vrijednosti za p.

3. Neka je polumjer velike kružnice jednak r, one manje koja je s iste strane tetive kao i središte kružnice r_1, a druge manje r_2. Neka je d udaljenost središta kružnice od tetive, a c udaljenost dirališta malih kružnica s tetivom, i točke na tetivi najbliže središtu velike kružnice.



Imamo jednakosti

$$
\begin{aligned}
(r_1 - d)^2 + c^2 &= (r - r_1)^2 \\
(r_2 + d)^2 + c^2 &= (r - r_2)^2,
\end{aligned}
$$

iz kojih slijedi

$$
r_1 = \frac{r^2 - c^2 - d^2}{2(r - d)}, \qquad r_2 = \frac{r^2 - c^2 - d^2}{2(r + d)},
$$

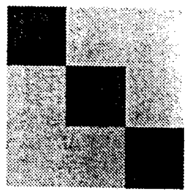
pa je $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r+d}{r-d}$, neovisno o c.

4. Uočimo jedno crveno polje (polje 0) i kvadrat 3×3 oko njega.

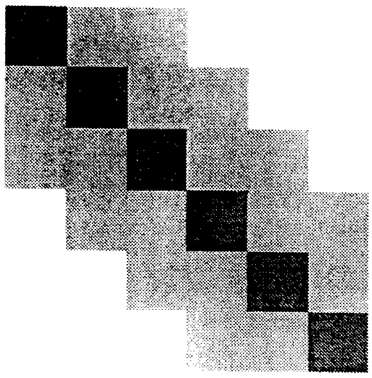
1	2	3
4	0	6
7	8	9

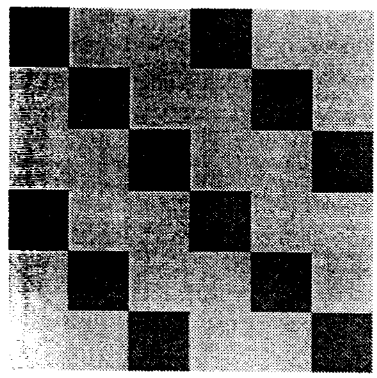
Kvadratići koji s tim crvenim poljem imaju zajedničku stranicu ne mogu biti crveni (ako je polje 2 crveno, onda među poljima 124078 i 230689 više nema crvenih, pa je u 2×3 pravokutniku 406789 samo jedan crveni kvadratić).

Slijedi da je crven ili kvadratić 1 ili kvadratić 3. Neka je crven npr. kvadratić 1. Tada mora biti crven i kvadratić 9, te su kvadratići 1,0,9 jedini crveni u promatranom 3×3 kvadratu.



Promatrajući niz 3×3 kvadrata u kojem susjedi imaju zajednički 4×4 kvadrat, vidimo da se crvena polja nastavljaju na dijagonalu iz prvog kvadrata. Promatranjem 2×3 pravokutnika kojima je po 5 kvadratića u upravo dobivenom nizu vidimo, da je crvena svaka treća dijagonala.





U 9×11 pravokutniku nalazi se 9 kvadrata veličine 3×3 i tri pravokutnika veličine 2×3. Ukupni broj crvenih polja je jednak $9 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 33$.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Novi Vinodolski, 8. – 11. svibnja 1997. godine

II. razred

1. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut sa središtem O. Neka su M i N polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$, a L točka presjeka pravaca AM i BN. Dokažite:

   (a) $P(ABL) = P(DMLN)$;

   (b) $\measuredangle ALD = \measuredangle OLN = 60°$;

   (c) $\measuredangle OLD = 90°$.

2. Dokažite da za pozitivne, realne i različite brojeve a, b i c vrijedi nejednakost
$$a^a b^b c^c > a^b b^c c^a.$$

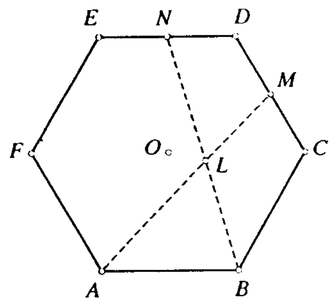
3. U decimalnom zapisu broja 2^{1997} ima m znamenaka, a u zapisu broja 5^{1997} ima n znamenaka. Kolika je suma $m + n$?

4. U ravnini je dano 1997 točaka. Dokažite da među svim udaljenostima po dvije od tih točaka ima barem 32 različite.

Rješenja za II. razred

Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. (a)



Primijetimo da rotacijom oko O za 60° četverokut $ABCM$ prelazi u $BCDN$, pa su to sukladni četverokuti jednake površine. Njihov presjek je četverokut $BCML$, pa preostali trokut ABL i četverokut $LMDN$ imaju jednake površine.

(b) i (c) Dužina $\overline{AM}$ pri rotaciji za 60° oko O prelazi u $\overline{BN}$.
Zato je kut među njima 60° i $\sphericalangle ALB = 60^\circ$, $\sphericalangle ALN = 120^\circ$.

Prvi način. Točka O je jednako udaljena od pravca AM i BN (zbog opisane rotacije). OL je simetrala kuta $\sphericalangle ALN$ i stoga je $\sphericalangle ALO = \sphericalangle OLN = 60^\circ$. Točka D je jednako udaljena od pravaca AM i BN $(d(D,MA) = d(C,MA) = d(D,NB))$. Dakle, DL je simetrala kuta $\sphericalangle NLM$ i $\sphericalangle LND = 30^\circ$, $\sphericalangle OLD = \sphericalangle OLN + \sphericalangle NLD = 90^\circ$.

Drugi način. Točke D, O, N, M leže na kružnici, jer su kutovi kod N i M pravi.. Točka L također leži na toj kružnici jer je $\sphericalangle NDM + \sphericalangle MLN = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$. Prema teoremu o obodnom kutu je

$$\sphericalangle OLD = \sphericalangle OMD = 90^\circ,$$

$$\sphericalangle OLN = \sphericalangle ODN = 60^\circ,$$

$$\sphericalangle ALO = \sphericalangle ALN - \sphericalangle OLN = 60^\circ.$$

2. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a = \max\{a, b, c\}$ (inače zamijenimo a i $\max\{a, b, c\}$). Imamo ova dva slučaja

1° $a > b > c$.

Tada je $b^b c^c > b^c c^b$ (zbog $b^{b-c} > c^{b-c}$). Pomnožimo li tu nejednakost s a^a dobivamo

$$a^a b^b c^c > a^a b^c c^b.$$

Ali $a^a c^b b^c > a^b b^c c^a$, jer je $a^{a-b} > c^{a-b}$. Dakle vrijedi

$$a^a b^b c^c > a^b b^c c^a.$$

2° $a > c > b$.

I opet vrijedi $b^b c^c > b^c c^b$ zbog $c^{c-b} > b^{c-b}$. Pomnožimo li ovo s a^a dobivamo

$$a^a b^b c^c > a^a b^c c^b > a^b b^c c^a.$$

Posljednja nejednakost vrjedi zbog $a^{a-b} > c^{a-b}$.

3. Ako u decimalnom zapisu broja A koji nije potencija broja 10 ima N znamenaka, onda je

$$10^{N-1} < A < 10^N, \quad \text{t.j. } N - 1 < \log A < N.$$

Zato je $N = \log A + \alpha$, gdje je $0 < \alpha < 1$.

U našem slučaju je

$$m = \log 2^{1997} + \alpha_1 = 1997 \log 2 + \alpha_1, \quad \text{gdje je } 0 < \alpha_1 < 1,$$

$$n = \log 5^{1997} + \alpha_2 = 1997 \log 5 + \alpha_2, \quad \text{gdje je } 0 < \alpha_2 < 1$$

pa je $m + n = 1997(\log 2 + \log 5) + \alpha_1 + \alpha_2 = 1997 + \alpha_1 + \alpha_2$. Odatle slijedi da je $\alpha_1 + \alpha_2$ cijeli broj, a kako je $0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 2$, mora biti $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Zato je $m + n = 1998$.

4. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji samo 31 različita međusobna udaljenost $r_1, ..., r_{31}$. Uzmemo li dvije točke A i B, sve ostale se nalaze na presjecima kružnica sa središtima A i B polumjera r_1, ..., r_{31}, tj. kružnica $k(A, r_i)$ i $k(B, r_i)$, $i = 1, .., 31$. Takvih presjeka ima najviše $2 \cdot 31^2$, pa ukupan broj točaka ne bi bio veći od

$$2 \cdot 31^2 + 2 = 1924 < 1997$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom. Zato su među svim udaljenostima barem 32 različite.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Novi Vinodolski, 8. – 11. svibnja 1997. godine

III. razred

1. Neka su x, y, z, a, b, c cijeli brojevi za koje vrijedi:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2, \\ x^2 + z^2 &= b^2, \\ y^2 + z^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Dokažite da je broj xyz djeljiv s

(a) 5, (b) 55.

2. Dokažite da za svaki realan broj x i svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 2^2 x| + \cdots + |\cos 2^n x| \geq \frac{n}{2\sqrt{2}}.$$

3. Neka su u tetraedru $ABCD$ površine strana ABD, ACD, BCD i BCA redom jednake S_1, S_2, Q_1, Q_2, a prostorni kut između strana ABD i ACD jednak α, odnosno β između BCD i BCA. Dokažite da je

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2\cos\beta.$$

4. Nad stranicama trokuta ABC konstruirani su slični trokuti ABD, BCE, CAF ($k = |AD| : |DB| = |BE| : |EC| = |CF| : |FA|$; $\alpha = \sphericalangle ADB = \sphericalangle BEC = \sphericalangle CFA$). Dokažite da su polovišta dužina $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$ vrhovi paralelograma, čiji je jedan kut jednak α, a omjer duljina odgovarajućih stranica k.

Rješenja za III. razred

Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. (a) Kvadrat cijelog broja pri dijeljenju s 5 daje ostatke 0^2, 1^2 ili 2^2, t.j. 0, 1 ili 4. Pretpostavimo obratno, tj. da 5 ne dijeli xyz. Tada x^2, y^2, z^2 daju ostatke 1 ili 4. Dakle, dva među njima, npr. x^2 i y^2 daju isti ostatak. Tada je

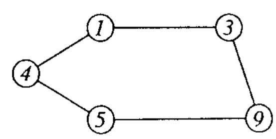
$$x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 5 \implies a^2 \equiv 2 \pmod 5,$$

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 4 \pmod 5 \implies a^2 \equiv 3 \pmod 5,$$

što je u suprotnosti s $a^2 \equiv 1$ ili $4 \pmod 5$. Dakle, 5 dijeli xyz.

(b) Preostaje provjeriti djeljivost s 11. Kvadrat cijelog broja pri dijeljenju s 11 daje ostatke $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ ili 5^2, t.j. $0, 1, 3, 4, 5$ ili 9. Pretpostavimo suprotno, tj. da 11 ne dijeli xyz. Zbog jednostavnijeg zapisa promatrajmo graf s vrhovima $1, 3, 4, 5, 9$. Dva vrha i, j spojimo bridom ukoliko je

$$i + j \equiv 0, 1, 3, 4, 5, 9 \pmod{11}.$$



Očigledno u ovom grafu nema trokuta, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Dakle, 11, pa onda i 55 dijeli xyz.

2. Dokažimo najprije da je za svaki $x \in \mathbf{R}$

$$|\cos x| + |\cos 2x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zbog parnosti funkcije kosinus tvrdnju je dovoljno pokazati na intervalu $[0, \pi]$.

Za $x \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$ je $|\cos x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ pa tvrdnja vrijedi.

Za $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ je $|\cos x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Stavimo $t = \cos x$, pa je

$$|\cos x| + |\cos 2x| = |t| + |2t^2 - 1| = t - 2t^2 + 1.$$

Pokazat ćemo da je $t - 2t^2 + 1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, za $t \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Promatrajmo kvadratnu funkciju $p(t) = -2t^2 + t + 1$. Njezine nultočke su $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 1$, pa iz $p(t) \geq \min\{p(0), p(\frac{1}{\sqrt{2}})\} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Zato je $|\cos x| + |\cos 2x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ za $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Analognim zaključivanjem vidi se da ista tvrdnja vrijedi i za $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ (provjeri se da je $-t - 2t^2 + 1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ za $t \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$).

U svakom slučaju je

$$|\cos z| + |\cos 2z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Stavljajući $z = x$, $z = 4x$, $z = 16x$,..., $z = 2^k x$ u gornju nejednakost i zbrajajući sve nejednakosti dobivamo:

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \cdots + |\cos 2^{2k} x| + |\cos 2^{2k+1} x| \geq \frac{k+1}{\sqrt{2}}.$$

Ako je $n = 2k + 1$ neparan broj, onda je

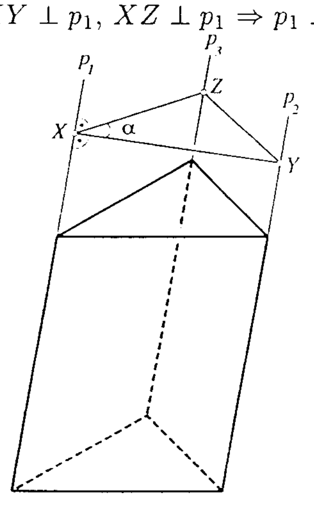
$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \cdots + |\cos 2^n x| \geq \frac{n+1}{2\sqrt{2}} > \frac{n}{2\sqrt{2}}.$$

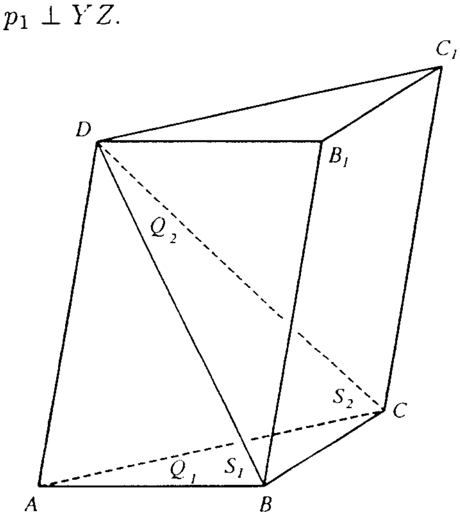
Ako je $n = 2k + 2$ paran broj onda je

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \cdots |\cos 2^n x|$$

$$\geq |\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \cdots |\cos 2^{n-1} x| \geq \frac{(n-1)+1}{2\sqrt{2}} = \frac{n}{2\sqrt{2}}.$$

3. Promatrajmo trostranu prizmu s bazom ABC. Neka su p_1, p_2, p_3 pravci na kojima leže bočni bridovi na kojima su vrhovi A, B, C. Ravnina okomita na bočne bridove siječe ove pravce u točkama X, Y i Z. Tada je $XY \perp p_1$, $XZ \perp p_1 \Rightarrow p_1 \perp XYZ \Rightarrow p_1 \perp YZ$.





Kut $\sphericalangle YXZ$ jednak je kutu između pobočki nad AB i AC. Po kosinusovom poučku za trokut XYZ je

$$|YZ|^2 = |XY|^2 + |XZ|^2 - 2|XY| \cdot |XZ| \cos\alpha.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s kvadratom l^2 duljine bočnog brida, dobivamo

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos\alpha \qquad (1)$$

gdje su P, P_1, P_2 površine pobočki nad BC, AB, AC.

Upišimo sada tetraedar $ABCD$ u prizmu $ABCDB_1C_1$ i primijenimo (1):

$$4S_1^2 + 4S_2^2 - 8S_1S_2\cos\alpha = S^2$$

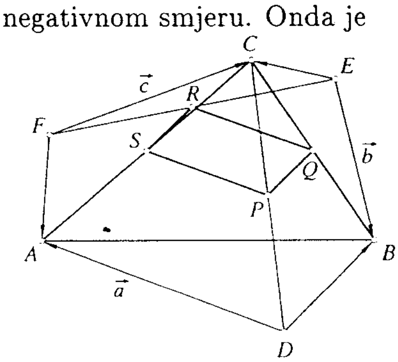
gdje je S površina paralelograma BCC_1B_1.

Analogno se dobiva

$$4Q_1^2 + 4Q_2^2 - 8Q_1Q_2\cos\beta = S^2$$

odakle slijedi tvrdnja.

4. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{EB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{FC}$; $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ vektori dobiveni od $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ rotacijom za kut α u negativnom smjeru. Onda je



$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{k}\vec{a}', \quad \overrightarrow{EC} = \frac{1}{k}\vec{b}', \quad \overrightarrow{FA} = \frac{1}{k}\vec{c}'.$$

Zbog $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ je i $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ i $\vec{a}' + \vec{b}' + \vec{c}' = \vec{0}$ (proporcionalni i zarotirani vektori).

Neka su P, Q, R, S redom polovišta stranica $\overline{DC}$, $\overline{BC}$, $\overline{EF}$ i $\overline{AC}$. Tada je

$$\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\vec{a}; \quad \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB},$$

t.j. PS je paralelno s AD i PQ s BD, pa je $\sphericalangle SPQ = \sphericalangle ADB = \alpha$.

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \vec{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$$

$$= \frac{1}{2}(-\vec{b} + \frac{1}{k}\vec{b}') - \vec{c} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \frac{1}{k}\vec{b}') = -\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{a}}{2} = \overrightarrow{PS}$$

pa je $PQRS$ paralelogram i $\frac{|SP|}{|PQ|} = \frac{|DA|}{|DB|} = k$.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Novi Vinodolski, 8. – 11. svibnja 1997. godine

IV. razred

1. Nađite posljednje četiri znamenke broja 3^{1000} i broja 3^{1997}.

2. U ravnini je dana kružnica k i točka K. Za bilo koje dvije različite točke P i Q na k, kružnica k' prolazi kroz točke P, Q i K. Neka je M sjecište tangente na kružnicu k' u točki K i pravca PQ. Opišite geometrijsko mjesto točaka M kada P i Q prolaze svim točkama kružnice k.

3. Dana je funkcija f definirana na pozitivnim cijelim brojevima, koja ima ova svojstva

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2,$$

$$f(n+2) = f(n+2-f(n+1)) + f(n+1-f(n)), \quad (n \geq 1).$$

   (a) Pokažite da je $f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}$ za svaki $n \geq 1$.

   (b) Ako je $f(n)$ neparan, pokažite da je $f(n+1) = f(n) + 1$.

   (c) Za dani prirodan broj k odredite sve vrijednosti n za koje je

$$f(n) = 2^{k-1} + 1.$$

4. Neka je k prirodan broj. Odredite broj nesukladnih trokuta kojima su vrhovi u vrhovima zadanog pravilnog $6k$-terokuta.

Rješenja za IV. razred

Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Raspišimo prvi broj u obliku

$$\begin{aligned} 3^{1000} &= (10-1)^{500} \\ &= n\cdot 10^4 - \tfrac{500\cdot 499\cdot 498}{6}\cdot 10^3 + \tfrac{500\cdot 499}{2}\cdot 10^2 - 500\cdot 10 + 1 \\ &= 10\,000(n - 50\cdot 499\cdot 83) + 5\,000(499\cdot 5 - 1) + 1. \end{aligned}$$

U posljednjoj zagradi je paran broj, pa je traženi završetak 0001.

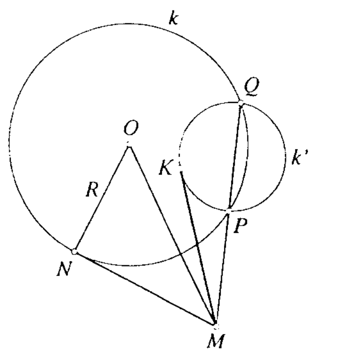
Isti završetak ima i broj $3^{2000} = (\ldots 0001)(\ldots 0001) = \ldots 0001$.

Neka 3^{1997} ima oblik $\ldots xyzt$. Tada je $27\cdot 3^{1997} = \ldots 0001$ i dalje redom:

$$\begin{array}{lcr} 27\cdot(\ldots xyzt) = \ldots 0001 & \Rightarrow & t=3,\ \ 27t = 81; \\ 270\cdot(\ldots xyz) + 81 = \ldots 0001 & & /+19,\ /:10 \\ 27\cdot(\ldots xyz) + 10 = \ldots 002 & \Rightarrow & z=6,\ \ 27z+10=172; \\ 270\cdot(\ldots xy) + 172 = \ldots 002 & & /+28,\ /:10 \\ 27\cdot(\ldots xy) + 20 = \ldots 03 & \Rightarrow & y=9,\ \ 27y+20=263; \\ 270\cdot(\ldots x) + 263 = \ldots 03 & & /+37,\ /:10 \\ 27\cdot(\ldots x) + 30 = \ldots 4 & \Rightarrow & x=2. \end{array}$$

Dakle, broj 3^{1997} ima završetak 2963.

2. Neka je O središte kružnice k i R njezin polumjer. Iz točke M povucimo tangentu na kružnicu k. Budući da je kvadrat duljine tangente jednak produktu duljina sekante i njezinog vanjskog dijela (potencija točke u odnosu na kružnicu) imamo



$$|MK|^2 = |MQ|\cdot|MP| = |MN|^2,$$

$$|OM|^2 - |MK|^2 = |OM|^2 - |MN|^2 = R^2.$$

Sada se pomoću Pitagorinog poučka dokaže da točka M leži na pravcu l, koji je okomit na OK, i to za sve točke za koje je razlika kvadrata udaljenosti od točaka O i K jednaka R^2. Može se pokazati i obratno, tj. da sve točke te okomice l pripadaju našem skupu: ako za točku $M \in l$ konstruiramo proizvoljnu kružnicu, koja dodiruje MK u točki K i siječe k u nekim točkama P i Q, tada pravac PQ siječe l u točki M.

3. (a) Tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da je $f(n+1) - f(n) \in \{0,1\}$ za $n = 1, 2, ..., m-1$, za neki $m \geq 2$. Tada je za svaki takav n

$$[(n+2) - f(n+1)] - [(n+1) - f(n)] = 1 - [f(n+1) - f(n)] \in \{0,1\},$$

$$f(n+2 - f(n+1)) - f(n+1 - f(n)) \in \{0,1\} \qquad (*)$$

prema uvjetu zadatka i induktivnoj pretpostavci.

Sada promatramo dva slučaja:

1° $f(m) = f(m-1) + 1$.

$$\begin{aligned} f(m+1) - f(m) &= f(m+1-f(m)) - f(m-1-f(m-2)) \\ &= f(m - f(m-1)) - f(m-1-f(m-2)) \in \{0,1\} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{prema } (*)). \end{aligned}$$

2° $f(m) = f(m-1)$. Sada je

$$f(m - f(m-1)) = f(m-1-f(m-2))$$

pa je

$$\begin{aligned} f(m+1) - f(m) &= f(m+1-f(m)) - f(m-1-f(m-2)) \\ &= f(m+1-f(m)) - f(m - f(m-1)) \in \{0,1\} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{prema } (*)). \end{aligned}$$

Prema tome, (a) vrijedi za $n = m$, pa po matematičkoj indukciji vrijedi za svaki n.

(b) Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi po danim podacima. Pretpostavimo da ona vrijedi za $n = 1, 2, ..., m-1 \geq 1$. Neka je $f(m)$ prvi sljedeći neparan broj. Tada je $f(m-1)$ parno, pa je $f(m) = f(m-1) + 1$. Dakle,

$$\begin{aligned} f(m+1) &= f(m+1-f(m)) + f(m - f(m-1)) \\ &= 2f(m - f(m-1)). \end{aligned}$$

Prema tome, $f(m+1)$ je paran i jednak $f(m) + 1$, prema (a).

(c) Pokazat ćemo indukcijom da je za svaki broj m, $n = 2^m$ jedinstveno rješenje jednadžbe $f(n) = 2^{m-1} + 1$. Za $m = 1$ tvrdnja je očigledna. Pretpostavimo da je $n = 2^m$, $m \geq 1$ jedinstveno rješenje jednadžbe $f(n) =$

$2^{m-1}+1$. Iz (a) i (b) slijedi da postoji jedinstveni broj u takav da je $f(u)=2^m+1$. (Kad tako ne bi bilo, tada bi $f(n)$ bilo konstantno počevši od nekog broja, što je u suprotnosti s rekurzivnom relacijom koja definira $f(n+2)$ za velike n.)

Sada je $2^m+1=f(u-f(u-1))+f(u-1-f(u-2))$ i $f(u-1)=2^m$. Kako je $f(u-f(u-1))-f(u-1-f(u-2))\in\{0,1\}$, vrijedi $f(u-f(u-1))=f(u-1-f(u-2))+1=2^{m-1}+1$. Prema induktivnoj pretpostavci je $u-f(u-1)=2^m$ i $u=2^m+f(u-1)=2^{m+1}$.

4. Prvo rješenje. Svih trokuta ima $\binom{6k}{3}$. Od toga je $2k$ međusobno sukladnih jednakostraničnih. Nesukladnih jednakokračnih, koji nisu jednakostranični ima $\frac{6k}{2}-2=3k-2$, a svaki od njih može se rotacijom dovesti u još $6k$ dozvoljenih položaja. Za svaki od preostalih trokuta postoji $6k$ položaja u koji se može dovesti rotacijom, a svaki od njih ima još i osnosimetričan par. Dakle, svaki skup sukladnih trokuta koji nisu jednakokračni (pa ni jednakostranični) ima po $6k\cdot 2$ elemenata.

Ako sada s x označimo broj nesukladnih trokuta koji nisu jednakokračni, dobivamo

$$\binom{6k}{3}=2k+6k\cdot(3k-2)+6k\cdot 2\cdot x,$$

iz čega slijedi da je $x=3k^2-3k+1$. Ukupan broj nesukladnih trokuta je $1+(3k-2)+x=3k^2$.

Drugo rješenje. Odaberimo jedan vrh trokuta i neka prva stranica (npr. u pozitivnom smjeru) bude najkraća, a zadnja najdulja. To nam osigurava da nećemo promatrati sukladne trokute. Ako s x, y, z označimo broj vrhova $6k$-terokuta za koje se treba pomaknuti od prvog do drugog, drugog do trećeg, odnosno trećeg do prvog vrha trokuta, onda uvjet na duljine stranice daje $1\le x\le y\le z\le 6k-2$ i $x+y+z=6k$. Za odabrane x i y imamo ili jedan ili nijedan z. Za odabrani x postoji $\lfloor\frac{6k-x}{2}\rfloor-(x-1)$ mogućnosti za y za koje postoji točno jedan) odgovarajući z.

Sada dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=1}^{2k}\left(\left\lfloor\frac{6k-x}{2}\right\rfloor-(x-1)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{k}\left(\left\lfloor\frac{6k-2i}{2}\right\rfloor-(2i-1)\right)+\sum_{i=1}^{k}\left(\left\lfloor\frac{6k-2i+1}{2}\right\rfloor-(2i-1-1)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{k}((3k-i)-(2i-1))+\sum_{i=1}^{k}((3k-i)-(2i-2))=3k^2.
\end{aligned}$$