MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

1. ožujka 1997.

I. razred

1. Odredite sva realna rješenja jednadžbe:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^{12}} - \frac{4}{x^7} = 0.$$

2. Neka su x i y cijeli brojevi. Dokaži da je tada $3x + y$ djeljivo s 13 ako i samo ako je $5x + 6y$ djeljivo s 13.

3. Iz neke točke hipotenuze pravokutnog trokuta spuste se okomice na katete. Neka su nožišta tih okomica N_1 i N_2. Kada će spojnica tih nožišta, $\overline{N_1N_2}$, biti najkraća? Kolika je duljina te najkraće spojnice ako su duljine kateta a i b?

4. Tri kružnice s nepoznatim središtima, u parovima se dodiruju u točkama A, B i C. Koristeći jedno ravnalo konstruirajte središta tih kružnica.

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak nosi po 25 bodova.

1. Vidimo da $x = 0$ ne može biti rješenje. 2 boda
Zato množenjem s x^{12} dobivamo ekvivalentnu jednadžbu:

$$x^{10} + x^6 + x^4 + 1 - 4x^5 = 0.$$

5 bodova

Grupiranjem x^5, po jednog uz svaki od prva četiri sumanda, dobivamo:

$$x^5(x^5 - 1) + x^5(x - 1) - x^4(x - 1) - (x^5 - 1) = 0$$

10 bodova

i na kraju:

$$(x^5 - 1)^2 + x^4(x - 1)^2 = 0.$$

5 bodova

Oba pribrojnika na lijevoj strani su nenegativna i zbroj im je jednak nula, pa svaki od njih mora biti jednak nuli.
Zaključujemo da je jedino rješenje $x = 1$. 3 boda

Napomena 1. U prvoj jednadžbi mogli smo $-4x^5$ interpretirati kao $-2x^5 - 2x^5$, pa odmah uočiti dva kvadrata binoma $(x^5 - 1)^2 + (x^3 - x^2)^2 = 0$.

2. Prvo rješenje. Neka je $3x + y = A$ i $5x + 6y = B$. Promatramo izraz:

$$nA + mB = (3n + 5m)x + (n + 6m)y.$$

10 bodova

Izaberimo cijele brojeve m i n tako da je desna strana sigurno djeljiva s 13, tj.

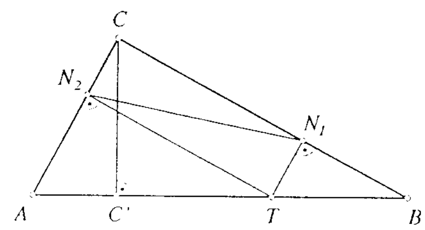
$$\begin{aligned} 13 &\mid 3n + 5m \\ 13 &\mid n + 6m. \end{aligned}$$

Najjednostavnije rješenje je $n = 1$, $m = 2$ za koje je $A + 2B = 13(x + y)$. 10 bodova
Budući da 1 i 2 nisu djeljivi s 13, slijedi da ako je jedan od A ili B djeljiv s 13, onda je i drugi djeljiv s 13. 5 bodova

Drugo rješenje – izravno. Pretpostavimo da je $3x + y = 13k$. Tada je npr. $5x + 6y - 6 \cdot (13k) = -13x$, pa je i $5x + 6y$ djeljivo s 13. S druge strane, ako je $5x + 6y = 13l$, onda je $3x + y + 2 \cdot (13l) = = 13(x + y)$. Zato je i $3x + y$ djeljlivo s 13. 25 bodova

3. Četverokut TN_1CN_2 je pravokutnik, pa možemo umjesto njegove dijagonale $\overline{N_1N_2}$ promatrati drugu dijagonalu $\overline{TC}$. Ona je najkraća kad se za točku T uzme nožište visine iz vrha C.

13 bodova



Slika 2 boda

Tada će duljina dijagonale biti jednaka visini iz vrha C, koja se može dobiti izjednačavanjem dviju formula za površinu trokuta:

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{cv}{2},$$

5 bodova

iz čega slijedi:

$$|N_1N_2| = v = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

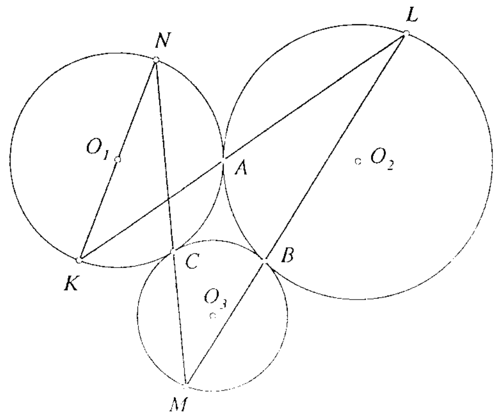
5 bodova

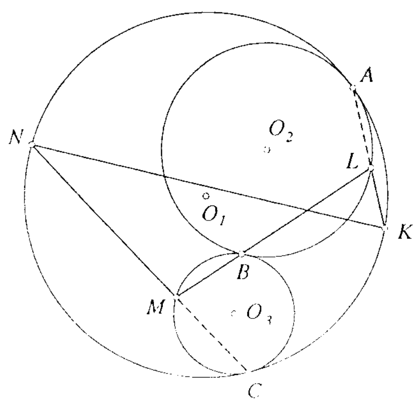
Napomena 1. Umjesto površina, mogu se promatrati i slični trokuti $AC'C$ i $CC'B$.

Napomena 2. Ako se ne uoči na vrijeme mogućnost prelaska na drugu dijagonalu, isti rezultat se može dobiti i promatrajući slične trokute (npr. ATN_2 i ABC) ili smještavanjem trokuta u koordinatni sustav. Račun je u tim slučajevima nešto dulji.

4. Kružnice se mogu dodirivati ili izvana ili se jedan par kružnica dodiruje izvana i svaka od te dvije kružnice dodiruje treću iznutra. Promatrajmo slučaj kada se kružnice dodiruju izvana.

5 bodova





Neka se kružnice sa središtima O_1 i O_2 dodiruju *izvana* u točki A. Neka je K bilo koja točka jedne od tih kružnica, a L presjek pravca AK s drugom kružnicom različit od točke A. Promatranjem jednakokračnih trokuta O_1KA i O_2LA vidi se da su kutevi O_1KA i O_2LA jednaki, pa su pravci O_1K i O_2L paralelni.

5 bodova

Neka je M točka treće kružnice (različita od B) koja se nalazi na pravcu LB, a N točka prve koja se nalazi na pravcu MC (i različita je od C). Prema dokazanom je $O_1K||O_2L||O_3M||O_1N$. Zato je KN promjer prve kružnice. Na isti način konstruiramo još jedan promjer. Time dobivamo središte prve kružnice.

5 bodova

Središta druge i treće kružnice se dobivaju analogno ili malo kraćim postupkom (npr. koristeći pravac O_1A na kojem leži središte druge kružnice).

5 bodova

Napomena. Ovaj postupak je u redu za oba slučaja: kad se kružnice diraju izvana i kad dvije kružnice leže unutar treće. Dovoljno je da se promatra jedan od ova dva slučaja.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

1. ožujka 1997.

II. razred

1. Dokažite da svaki pravac koji prolazi središtem upisane kružnice trokuta dijeli opseg i površinu tog trokuta u istom omjeru.

2. Ako su koeficijenti a, b, c takvi da je $a > 0$ $b > a + c$, dokažite da jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva različita rješenja.

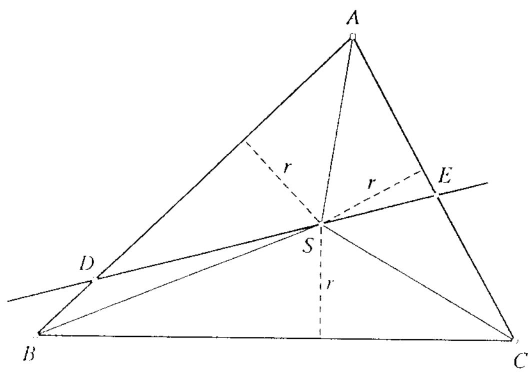
3. Ako su a i b kompleksni brojevi, dokažite da vrijedi jednakost:

$$|1 - a\bar{b}|^2 - |a - b|^2 = (1 + |ab|)^2 - (|a| + |b|)^2.$$

4. Dane su dvije kružnice k_1 i k_2 koje nemaju zajedničkih točaka. Zajedničke vanjske tangente, t_1 i t_2, diraju kružnicu k_1 u točkama A_1 i A_2, a kružnicu k_2 u točkama B_1 i B_2. Zajedničke unutarnje tangente, p_1 i p_2, diraju kružnicu k_1 u točkama C_1 i C_2, a kružnicu k_2 u točkama D_1 i D_2. Dokažite da je udaljenost pravaca A_1A_2 i C_1C_2 jednaka udaljenosti pravaca B_1B_2 i D_1D_2.

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak nosi po 25 bodova.

1. Neka je p pravac koji prolazi središtem upisane kružnice i siječe stranice (npr. $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$) trokuta u točkama D i E.



5 bodova

Tada je

$$\frac{P(ADE)}{P(BCED)} = \frac{P(ADS)+P(ASE)}{P(BDS)+P(BCS)+P(CES)}$$

$$= \frac{\frac{|AD|\cdot r}{2}+\frac{|AE|\cdot r}{2}}{\frac{|BD|\cdot r}{2}+\frac{|BC|\cdot r}{2}+\frac{|CE|\cdot r}{2}} = \frac{|AD|+|AE|}{|BD|+|BC|+|CE|},$$

gdje je r polumjer upisane kružnice tom trokutu. To znači da su traženi omjeri jednaki. 20 bodova

2. Dovoljno je pokazati da je diskriminanta $D > 0$. 10 bodova

(1) Ako je $c < 0$, tada je zbog $a > 0$.
$D = b^2 - 4ac \geq -4ac > 0$, tj. $D > 0$. 7 bodova

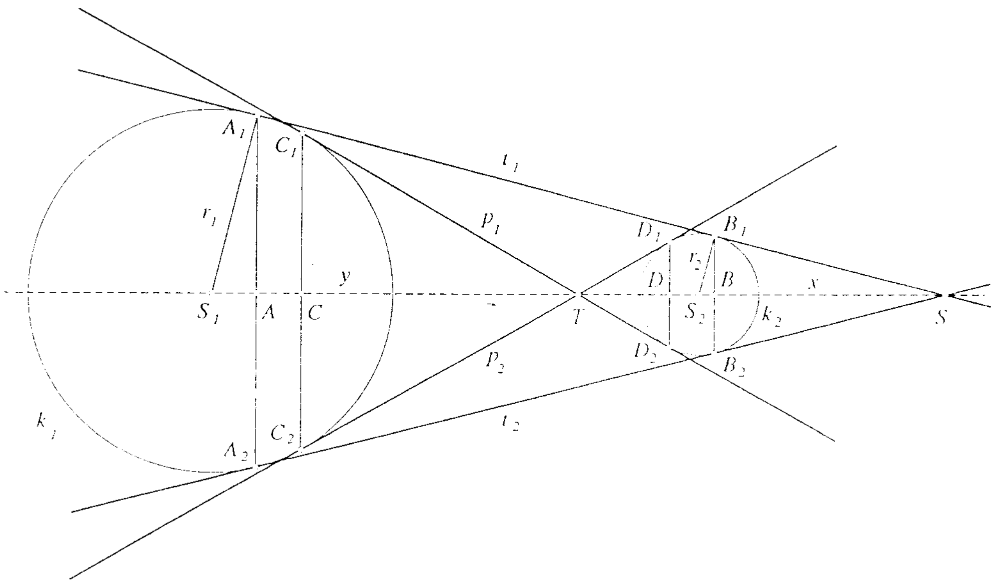
(2) Ako je $c \geq 0$, tada zbog $b > a + c > 0$, vrijedi
$D = b^2 - 4ac > (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0$, tj. $D > 0$. 8 bodova

Dakle, u oba slučaja je $D > 0$, što znači da jednadžba ima različita rješenja, čak štoviše, oba su realna.

3.

$$
\begin{aligned}
|1-a\bar{b}|^2-|a-b|^2 &= (1-a\bar{b})\overline{(1-a\bar{b})}-(a-b)\overline{(a-b)} && \text{5 bodova}\\
&= (1-a\bar{b})(1-\bar{a}b)-(a-b)(\bar{a}-\bar{b})\\
&= 1-\bar{a}b-a\bar{b}+a\bar{a}b\bar{b}-a\bar{a}+a\bar{b}+\bar{a}b-b\bar{b}\\
&= 1+|a|^2|b|^2-(|a|^2+|b|^2) && \text{10 bodova}\\
&= 1+2|ab|+|ab|^2-(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)\\
&= (1+|ab|)^2-(|a|+|b|)^2 && \text{10 bodova}
\end{aligned}
$$

4. Neka je $d = |S_1S_2|$ udaljenost središta kružnica k_1 i k_2. Promatrat ćemo slučaj kada se vanjske tangente sijeku u točki S, pri čemu je $x = |S_2S|$. (Ovdje smo uzeli da za njihove polumjere vrijedi $r_1 > r_2$.



2 boda

Trokuti A_1S_1S i B_1S_2S su slični, pa vrijedi:

$$\frac{x}{x+d} = \frac{r_2}{r_1} \text{ i odavde je } x = \frac{dr_2}{r_1-r_2}.$$

Tada je $|S_1S| = d + x = \frac{dr_1}{r_1-r_2}$.

Primjenom Euklidovog teorema na trokute S_1A_1S i S_2B_1S dobiva se:

$$|S_1A| = \frac{r_1^2}{|S_1S|} = \frac{r_1^2 - r_1r_2}{d} \quad \text{i} \quad |S_2B| = \frac{r_2^2}{|S_2S|} = \frac{r_1r_2 - r_2^2}{d}.$$

8 bodova

Neka je sada T sjecište unutarnjih tangenti.

Trokuti S_1C_1T i S_2D_2T su slični, pa za $y = |S_1T|$ vrijedi:

$$\frac{y}{d-y}=\frac{r_1}{r_2} \text{ i odavde je } |S_1T|=y=\frac{r_1 d}{r_1+r_2}, \quad |S_2T|=\frac{r_2 d}{r_2+r_2}.$$

Primjenom Euklidovog teorema na trokute S_1C_1T i S_2D_2T dobiva se:

$$|S_1C|=\frac{r_1^2}{|S_1T|}=\frac{r_1^2+r_1r_2}{d} \text{ i } |S_2D|=\frac{r_2^2}{|S_2T|}=\frac{r_2^2+r_1r_2}{d}.$$

8 bodova

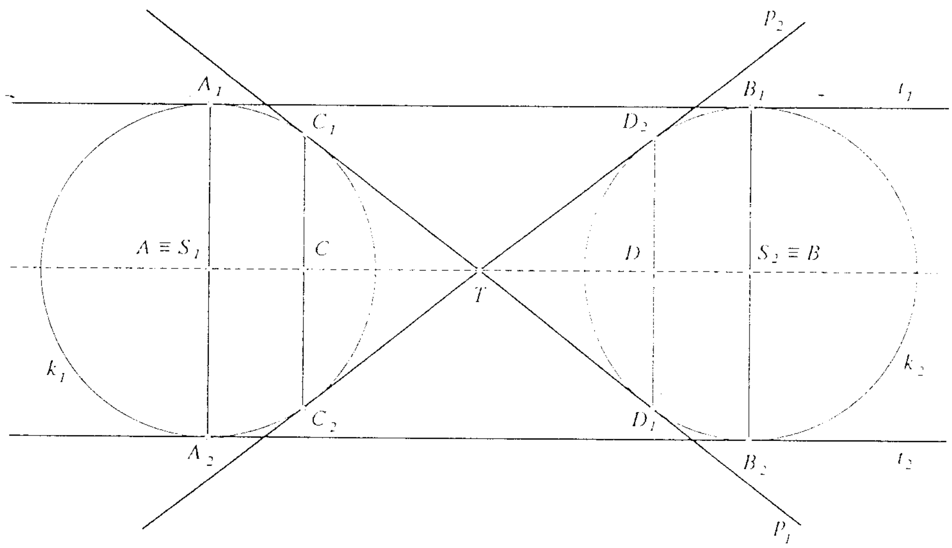
Promatrajmo udaljenosti $|AC|$ i $|BD|$ između pravaca A_1A_2 i C_1C_2 te pravaca B_1B_2 i D_1D_2:

$$|AC|=|S_1C|-|S_1A|=\frac{r_1^2+r_1r_2}{d}-\frac{r_1^2-r_1r_2}{d}=\frac{2r_1r_2}{d};$$

$$|BD|=|S_2D|+|S_2B|=\frac{r_2^2+r_1r_2}{d}+\frac{r_1r_2-r_2^2}{d}=\frac{2r_1r_2}{d}.$$

4 boda

Time je pokazana tvrdnja za $r_1>r_2$, a za $r_2>r_1$ dokaz se provodi analogno. Promatrajmo još slučaj $r_1=r_2$.



U ovom slučaju slika je simetrična s obzirom na simetralu dužine $\overline{S_1S_2}$, pa je $|AC|=|BD|$.

3 boda

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

1. ožujka 1997.

III. razred

1. Riješite nejednadžbu

$$\log_a(x-a) > \log_{\frac{1}{a}}(x+a)$$

u zavisnosti od parametra a.

2. Odredite sumu rješenja jednadžbe

$$\sin 3x + \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$$

u segmentu $[-\pi, 2\pi]$.

3. Koji od jednakokračnih trokuta upisanih u zadanu kružnicu polumjera R ima najveću sumu duljina osnovice i visine na nju.
Izrazite najveću vrijednost te sume pomoću R.

4. U ravnini je dano 1997 točaka, raspoređenih tako da svake tri određuju trokut površine najviše 1.
Dokažite da postoji trokut površine 4 koji sadrži sve dane točke.

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak nosi po 25 bodova.

1. Da bi ova dva logaritma bila definirana mora biti $a > 0$, $a \neq 1$ i $x > a$. 3 boda

Uz ove uvjete dana nejednadžba je ekvivalentna redom s:

$$\log_a(x-a) > -\log_a(x+a),$$
$$\log_a(x-a)(x+a) > 0,$$
$$\log_a(x^2-a^2) > 0.$$

10 bodova

Razlikujemo ova dva slučaja:

1° $0 < a < 1$ $\qquad$ 2° $a > 1$ 1 bod

U prvom slučaju je

$$x^2 - a^2 < 1, \quad x^2 < 1 + a^2, \quad x < \sqrt{1+a^2}.$$

4 boda

U drugom slučaju je

$$x^2 - a^2 > 1, \quad x^2 > 1 + a^2, \quad x > \sqrt{1+a^2}.$$

4 boda

Dakle, za $0 < a < 1$ rješenje je $x \in (a, 1) \cup (1, \sqrt{1+a^2})$,
a za $a > 1$ je $x \in (\sqrt{1+a^2}, \infty)$. 3 boda

2.

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &= 3 \sin x(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x;\end{aligned}$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Sada je dana jednadžba ekvivalentna s

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x + 2 - 2\sin^2 x = 0,$$
$$-4 \sin^3 x - 4 \sin^2 x + 3 \sin x + 3 = 0,$$
$$(1 + \sin x)(3 - 4\sin^2 x) = 0.$$

10 bodova

Sada je

1° $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; 2 boda

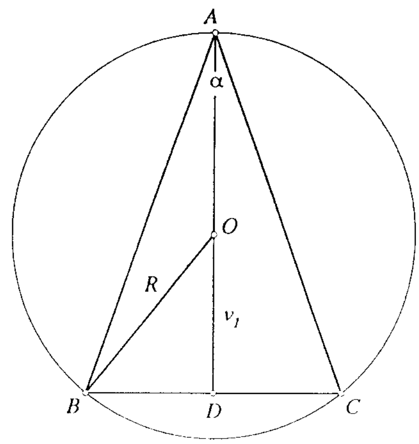
2° $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; 4 boda

3° $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. 4 boda

U danom segmentu rješenja su redom: $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, $x_3 = \frac{\pi}{3}$, $x_4 = \frac{2\pi}{3}$, $x_5 = -\frac{\pi}{3}$, $x_6 = \frac{5\pi}{3}$, $x_7 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_8 = \frac{4\pi}{3}$.
Tražena suma iznosi 4π. 5 bodova

3. Neka su oznake kao na slici, $|BC| = a$, $|AD| = v$. Iz trokuta OBD dobivamo $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, $\cos\alpha = \frac{v_1}{R}$. Odavde slijedi $a = 2R\sin\alpha$, $v = R + v_1 = R(1 + \cos\alpha)$.

5 bodova



Suma duljina osnovice i visine, u ovisnosti o kutu α iznosi $a + v = R(1 + \cos\alpha + 2\sin\alpha)$.

5 bodova

Odredimo maksimum ovog izraza.
Neka je kut φ takav da je $\mathrm{tg}\varphi = 2$. Tada je

$$1 + \cos\alpha + 2\sin\alpha = 1 + \cos\alpha + \mathrm{tg}\varphi\sin\alpha$$

$$= 1 + \frac{\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi} = 1 + \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}.$$

5 bodova

Ovaj izraz je maksimalan ako je $\cos(\alpha - \varphi)$ maksimalno,
tj. ako je $\cos(\alpha - \varphi) = 1$, odnosno, $\alpha = \varphi$ i $\mathrm{tg}\alpha = 2$. 5 bodova
Tada je

$$a + v = R(1 + \frac{1}{\cos\varphi}),\ \text{tj. (zbog } \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi}),\ a + v = R(1 + \sqrt{5}).$$

5 bodova

4. Uočimo trokut ABC maksimalne površine određen danim točkama. Vrijedi $P_{DEF} \leq P_{ABC} \leq 1$ za bilo koje točke D, E, F danog skupa.

3 boda

Neka je a pravac kroz A paralelan s BC, b pravac kroz B paralelan s AC i c pravac kroz C paralelan s AB, te neka je trokut KLM određen tim pravcima. Površina trokuta KLM je 4 puta veća od površine trokuta ABC, te je stoga manja ili jednaka od 4. 8 bodova
Tvrdimo da se danih 1997 točaka nalazi unutar trokuta KLM. 2 boda
Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka se neka dana točka T nalazi izvan trokuta KLM. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se ona nalazi sa suprotne strane pravca a u odnosu na točke B i C. Tada je $P_{BCT} > P_{BCA}$ (zajednička baza i različite visine), što je u suprotnosti s pretpostavkom. 12 bodova
Time je tvrdnja zadatka dokazana.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

1. ožujka 1997.

IV. razred

1. Odredite jednadžbu pravca p koji prolazi točkom $T(-1, 1)$, a polovište segmenta kojeg na p odsjecaju pravci $x + 2y - 1 = 0$ i $x + 2y - 3 = 0$ leži na pravcu $x - y - 1 = 0$.

2. Nađite sve prirodne brojeve x za koje je

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^x = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8) \ldots (1 + a^{2^n}),$$

gdje je a realan i n prirodan broj.

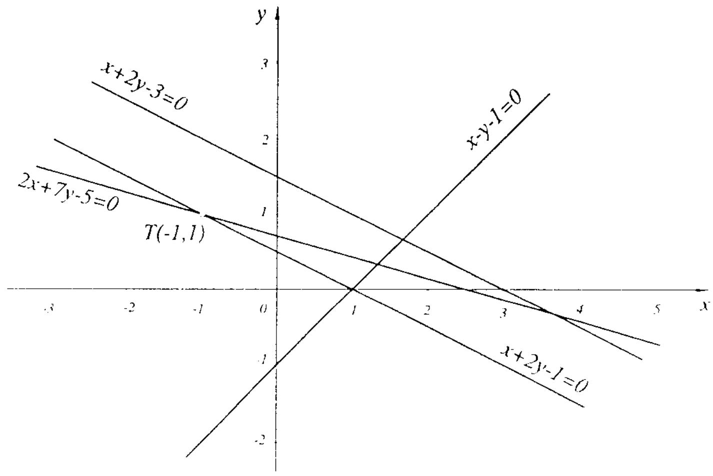
3. Neka je $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ..., p_n, ... niz svih prostih brojeva poredanih po veličini. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$p_n \geq 3n - 5.$$

4. Na koji način treba staviti dva predmeta u dvije različite ladice okruglog stola s n ($n \geq 5$) ladica, tako da vjerojatnost nalaženja barem jednog predmeta otvaranjem dviju susjednih ladica bude najmanja?

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak nosi po 25 bodova.

1. Pravac p ima jednadžbu $y-1=k(x+1)$. Presjek pravca p i pravca s jednadžbom $x+2y-1=0$ je točka $T(-1,1)$. 5 bodova



2 boda

Nađimo presjek pravca p i pravca s jednadžbom $x+2y-3=0$:

$$x+2kx+2k+2-3=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1-2k}{1+2k},\quad y=\frac{1+4k}{1+2k}.$$

5 bodova

Prema tome, koordinate polovišta su

$$P\left(\frac{-1+\frac{1-2k}{1+2k}}{2},\frac{1+\frac{1+4k}{1+2k}}{2}\right),\ \text{tj. } P\left(\frac{-2k}{1+2k},\frac{1+3k}{1+2k}\right).$$

5 bodova

Da bi točka P ležala na pravcu $x-y-1=0$ mora biti

$$\frac{-2k}{1+2k}-\frac{1+3k}{1+2k}-1=0 \quad\Rightarrow\quad k=-\frac{2}{7}.$$

5 bodova

Dakle, jednadžba pravca p je $y=-\frac{2}{7}x+\frac{5}{7}$. 3 boda

2. Za $a=1$ imamo:
$x+1=2^{n+1}$, tj. $x=2^{n+1}-1$. 5 bodova
Za $a\neq 1$ je:

$$\frac{a^{x+1}-1}{a-1}=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{2^n}) \qquad / \cdot(a-1)$$

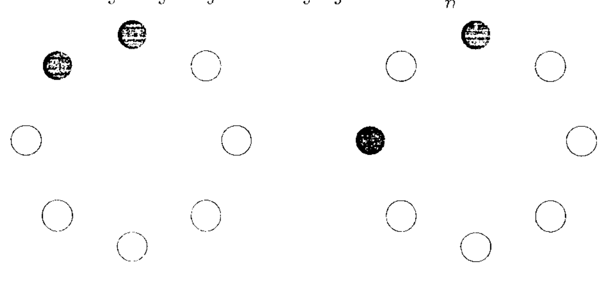
$$a^{x+1} - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1) \dots (a^{2^n} + 1)$$
$$= (a^4 - 1)(a^4 + 1)(a^8 + 1) \dots (a^{2^n} + 1)$$
$$\vdots$$
$$= a^{x+1} - 1 = a^{2^{n+1}} - 1$$

15 bodova

Odavde je
$x + 1 = 2^{n+1}$, tj. $x = 2^{n+1} - 1$. 5 bodova

3. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom.
1° Baza indukcije:
$p_1 = 2 \geq -2$, $p_2 = 3 \geq 1$, $p_3 = 5 \geq 4$. 5 bodova
2° Korak indukcije:
Pretpostavimo da je $p_n \geq 3n - 5$ za neki $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$. 5 bodova
Budući da broj $p_n + 1$ ne može biti prost (jer je paran i veći od 2), mora biti
$p_{n+1} \geq p_n + 2 \geq 3n - 5 + 2 = 3(n - 1)$. 10 bodova
Pošto je $n \geq 3$, to broj $3(n - 1)$ ne može biti prost, pa dobivamo da je
$p_{n+1} \geq 3(n - 1) + 1 = 3(n + 1) - 5$,
što je i trebalo dokazati. 5 bodova

4. Ukupan broj načina otvaranja po dviju susjednih ladica je n. Treba odrediti broj povoljnih slučajeva.Razlikovat ćemo ova dva slučaja:
(i) oba predmeta su u susjednim ladicama;
(ii) predmeti nisu u susjednim ladicama. 5 bodova
U prvom slučaju postoje tri para ladica, pri čemu je barem u jednoj dani predmet. U tom slučaju vjerojatnost je jednaka $\frac{3}{n}$. 10 bodova



(i) (ii)

U drugom slučaju postoje četiri para ladica, tako da je barem u jednoj od njih dani predmet. Sada je vjerojatnost jednaka $\frac{4}{n}$. 10 bodova
Dakle, vjerojatnost nalaženja barem jednog predmeta bit će najmanja ako su oba tražena predmeta u susjednim ladicama.