MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko – gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
6. ožujka 1998. godine

8. razred

1. Izračunaj

$$\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{8}}-\frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}} \ .$$

2. Pravac $p \ldots 3x-4y-1=0$ siječe pravac $a \ldots y=\frac{5}{3}x-3$ u točki A, a pravac $b \ldots 5x+4y-55=0$ u točki B. Izračunaj udaljenost između točaka A i B.

3. Odredi sve parove prostih brojeva čija je razlika kvadrata 120.

4. Duljina veće osnovice jednakokračnog trapeza je 44 cm, duljina kraka je 17 cm, a duljina dijagonale je 39 cm. Kolika je površina tog trapeza?

5. Dan je trokut ABC, pri čemu je $\angle BAC$ šiljast. Na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha A odabrana je točka D tako da je $|AD|=|AC|$. Neka je točka E nožište okomice iz vrha B na pravac koji prolazi točkom D i usporedan je s pravcem AC, točka B_1 nožište visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ i točka C_1 nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$.
Dokaži da je $|BE|=|BB_1|+|CC_1|$.

/ 98 OPĆ.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Nakon racionalizacije nazivnika svakog od tri zadana razlomka dobivamo:

$$\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{8}}-\frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}=\sqrt{8}+\sqrt{7}+\sqrt{10}-\sqrt{8}-(\sqrt{10}+\sqrt{7})$$

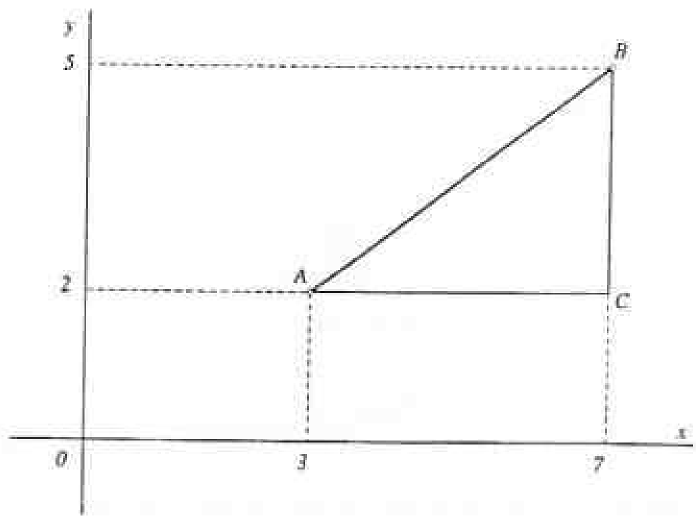
6 bodova

$$=\sqrt{8}+\sqrt{7}+\sqrt{10}-\sqrt{8}-\sqrt{10}-\sqrt{7}=0\ .$$

4 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

2.



Crtež

1 bod

Rješenje sustava jednadžbi $3x-4y-1=0$, $y=\frac{5}{3}x-3$ je $x=3, y=2$, a to su koordinate točke $A(3,2)$.

3 boda

Rješenje sustava jednadžbi $3x-4y-1=0$, $5x+4y-55=0$ je $x=7, y=5$, a to su koordinate točke $B(7,5)$.

3 boda

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ACB, pri čemu je $|AC|=7-3=4$, $|BC|=5-2=3$, lako odredimo duljinu $|AB|$. Naime, $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$ ili $|AB|^2=4^2+3^2$, tj. $|AB|=5$. 3 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je (x,y) traženi par prostih brojeva, pri čemu je $x>y$. Tada vrijedi $x^2-y^2=120$, odnosno $(x+y)(x-y)=120$. Očito je $x+y+x-y=2x$ paran broj, a to znači da oba faktora moraju biti iste parnosti, a kako je umnožak dva neparna broja neparan broj, zaključujemo da oba faktora moraju biti parna.

2 boda

Zato razlikujemo četiri moguća slučaja:

$$\begin{cases} x+y=60 \\ x-y=2 \end{cases},\quad \begin{cases} x+y=30 \\ x-y=4 \end{cases},\quad \begin{cases} x+y=20 \\ x-y=6 \end{cases}\quad \begin{cases} x+y=12 \\ x-y=10 \end{cases}.$$

Rješenja prva tri od ovih sustava ujedno su i traženi parovi (x,y) prostih brojeva, tj. $(31,29)$, $(17,13)$, $(13,7)$.

Primijetimo da sustav

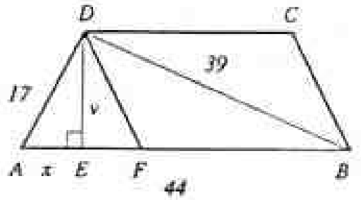
$$\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=10 \end{cases}$$

ne zadovoljava postavljene uvjete jer $y=1$ nije prost broj.

8 bodova

.... UKUPNO 10 BODOVA

4.



Skica 1 bod

Neka je $|DE| = v$ duljina visine trapeza $ABCD$, te $|AE| = x$. Tada je $|BE| = 44 - x$. Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut AED, odnosno na trokut BED, dobivamo $v^2 = 17^2 - x^2$ i $v^2 = 39^2 - (44-x)^2$. Zbog jednakosti lijevih strana u obje jednakosti, i desne strane su nužno jednake. Zato je $39^2 - (44-x)^2 = 17^2 - x^2$. 2 boda

Rješenje ove jednadžbe je $x = 8$ cm. 2 boda

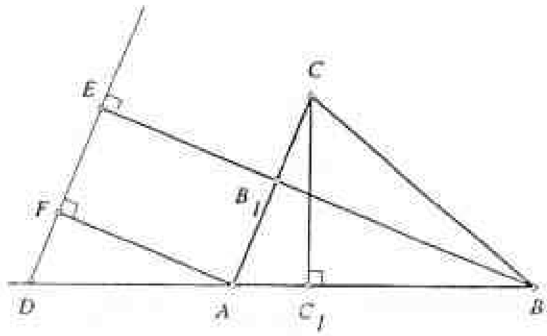
Sada iz jednadžbe $v^2 = 17^2 - x^2$ lako odredimo $v = 15$ cm. 1 bod

Kako je trokut AFD jednakokračan, slijedi da je $x = \frac{a-c}{2}$, pa je $8 = \frac{44-c}{2}$, tj. $c = 28$ cm. 2 boda

Konačno možemo odrediti površinu trapeza. Naime, $P = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$, $P = \frac{(44+28)\cdot 15}{2}$, $P = 540$ cm^2. 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



Skica 1 bod

Neka je točka F nožište okomice iz vrha A na pravac DE. Treba pokazati da je $\triangle AFD \cong \triangle AC_1C$. Naime, trokuti su pravokutni, $|AD| = |AC|$ i $\angle FDA = \angle CAC_1$, jer su to kutovi uz presječnicu, iz čega slijedi da je $|AF| = |CC_1|$. 3 boda

Lako se pokaže da je četverokut AB_1EF pravokutnik. Naime, $AC \parallel EF$, a zbog $\angle AFD = \angle B_1EF = 90°$ slijedi da je i $AF \parallel B_1E$, a to znači da je $|AF| = |B_1E|$. 3 boda

Kako je $|BE| = |BB_1| + |B_1E|$, a zbog $|B_1E| = |AF| = |CC_1|$, dobivamo da je $|BE| = |BB_1| + |CC_1|$, a to je i trebalo dokazati. 3 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA