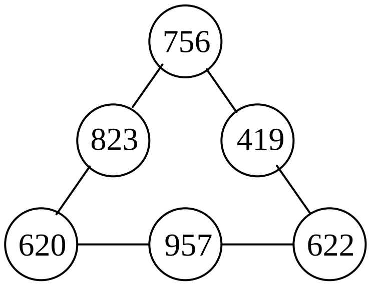
Regionalno natjecanje
1998. godina
4. razred

1. Koja dva broja na slici trebaju zamijeniti mjesta da bi zbroj tri broja na svakoj stranici trokuta bio isti?

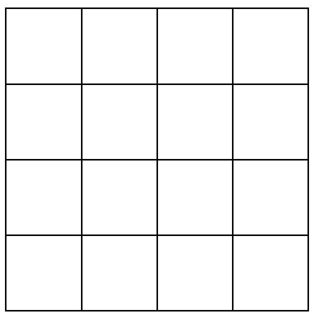


2. Na slici je prikazana tablica magičnog kvadrata dimenzija 5×5, u koju treba upisati sve prirodne brojeve od 1 do 25 tako da je zbroj brojeva u svakom retku, svakom stupcu i na obje dijagonale jednak 65. Ispuni prazna polja u tablici.

11		7		3
	12		8	
17				9
	18		14	
23		19		15

3. Umnožak je dva prirodna broja 667. Ako jedan od ta dva broja povećamo za 7, a drugi ostane nepromijenjen, novi je umnožak 870. Odredi početne brojeve.

4. Kvadrat stranice duljine 4 cm podijeljen je na 16 manjih kvadrata kao na slici.
   a) Koliko kvadrata ima na slici?
   b) Koliki je zbroj opsega svih tih kvadrata?



5. Ako stranicu jednog kvadrata povećamo za 5 cm, a drugu stranicu smanjimo za 3 cm, dobit ćemo pravokutnik. Je li veći opseg kvadrata ili pravokutnika? Za koliko? Odgovor obrazloži!

Regionalno natjecanje

1998. godina

6. razred

1. Ako nekom racionalnom broju dodamo 2 pa dobiveni zbroj pomnožimo s -3, od dobivenog umnoška oduzmemo -5, zatim od dobivene razlike oduzmemo početni broj, a novu razliku pomnožimo s -2, nakon čega od dobivenog umnoška oduzmemo 9, dobit ćemo -13. Koji je to racionalni broj?

2. Odredi sve proste brojeve p sa svojstvom da su $p+10$ i $p+14$ također prosti brojevi. Obrazloži odgovor!

3. Neki šesteroznamenkasti broj počinje znamenkom 1. Ako tu znamenku premjestimo na kraj, iza znamenke jedinica, dobivamo broj tri puta veći od početnoga. Odredi početni šesteroznamenkasti broj.

4. Zadan je paralelogram $ABCD$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka M tako da je $\angle AMD = \angle CMD$. Ako je točka P polovište dužine $\overline{MD}$, dokaži da je $CP \perp DM$.

5. Zadan je paralelogram $ABCD$. Neka je točka E osnosimetrična slika točke A s obzirom na pravac BD, a točka F neka je presjek dužina $\overline{CD}$ i $\overline{BE}$. Dokaži da je $\Delta BCF \cong \Delta DEF$.

Rješenja

Regionalno natjecanje

1998. godina

4. razred

1. Mjesto trebaju zamijeniti brojevi 620 i 419. Tada je zbroj brojeva na svakoj stranici jednak 1998.

2. Konačno je rješenje prikazano na slici 1.

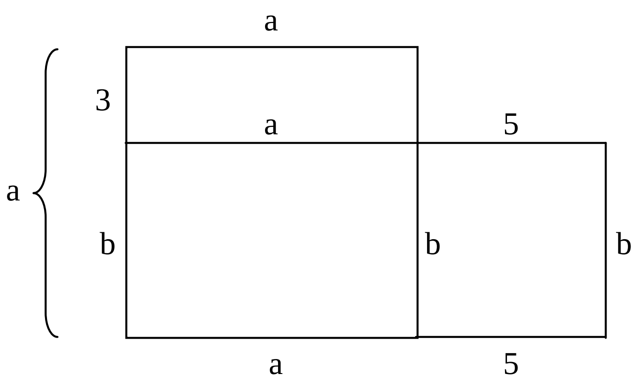
11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

3. Početni su brojevi 23 i 29.

4. Na slici ima:
   - 16 kvadrata stranice duljine 1 cm, a zbroj njihovih opsega je 16·4, tj. 64 cm;
   - 9 kvadrata stranice duljine 2 cm, a zbroj njihovih opsega je 9·(4·2). tj. 72 cm;
   - 4 kvadrata stranice duljine 3 cm, a zbroj njihovih opsega je 4·(4·3), tj. 48 cm;
   - 1 kvadrat stranice duljine 4 cm, opsega 16 cm.

   Prema tome, na slici ima ukupno 16+9+4+1, tj. 30 kvadrata, a ukupan je zbroj njihovih opsega 64+72+48+16, tj. 200 cm.

5. Promotrite donju sliku. Opseg pravokutnika veći je od opsega kvadrata za 4 cm.



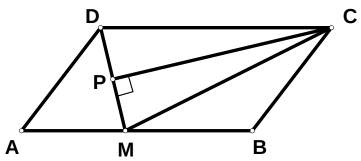
Rješenja
Regionalno natjecanje
1998. godina
6. razred

1. Traženi broj x zadovoljava jednadžbu $[(x+2)\cdot(-3)-(-5)-x]\cdot(-2)-9=-13$.
   Rješenje te jednadžbe je $x=-0.75$.

2. Očito $p=2$ nije rješenje jer je broj $p+10=2+10=12$ složen. Za $p=3$ dobivamo $p+10=13$ i $p+14=17$, tj. proste brojeve, pa je prost broj 3 jedno traženo rješenje. Svaki prost broj $p>3$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1 ili 2, tj. ima oblik $p=3k+1$ ili $p=3k+2$, pri čemu je k prirodan broj. Za $p=3k+1$ je broj $p+14=3k+1+14=3k+15=3\cdot(k+5)$ složen. Za $p=3k+2$ također je $p+10=3k+2+10=3k+12=3\cdot(k+4)$ složeni broj. Prema tome, jedino za prost broj $p=3$ zadani će izrazi opet biti prosti brojevi.

3. Označimo s x peteroznamenkasti broj što ga dobivamo kad početnom šesteroznamenkastom broju ispustimo prvu znamenku s lijeve strane. Prema uvjetima zadatka vrijedi jednadžba $3\cdot(100000+x)=10x+1$, a njezino je rješenje $x=42857$. Početni je broj 142857.

4. Kako je $\angle AMD=\angle CMD$ (uvjet zadatka) i $\angle AMD=\angle CDM$ (kutovi uz presječnicu), slijedi da je $\angle CMD=\angle CDM$, a to znači da je trokut CDM jednakokračan, pa je $|CM|=|CD|$. Ako je točka P polovište dužine $\overline{MD}$, onda je pravac CP simetrala osnovice $\overline{MD}$. Iz toga slijedi da je $CP\perp MD$.



5. Pravac BD je simetrala dužine $\overline{AE}$ pa vrijedi $|DA|=|DE|$ i $|BA|=|BE|$ (vidi donju sliku). Dakle, ΔAED i ΔAEB su jednakokračni, iz čega slijedi da je $\angle DAE=\angle DEA$ i $\angle BAE=\angle BEA$. Nadalje je $\angle BAD=\angle BED$ i $\angle BAD=\angle BCD$, što znači da je $\angle BED=\angle BCD$ i $\angle FED=\angle BCF$. Zbog $|AD|=|ED|$ i $|AD|=|BC|$ slijedi da je $|ED|=|BC|$. Nadalje je $\angle BFC=\angle DFE$, pa i $\angle CBF=\angle EDF$. Odatle slijedi tvrdnja zadatka.