

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
3. travnja 1998. godine

8. razred

1. Rješenje jednadžbe

$$\frac{\frac{2}{3}x - 1}{6} - \frac{\frac{3}{5}x + 7}{8} = \frac{\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}}{5} - 2\frac{1}{2}$$

je duljina dijagonale kvadrata, izražena u cm. Koliki je opseg tog kvadrata?

2. Dokaži da je zbroj $1^{1998} + 2^{1998} + 3^{1998} + 4^{1998}$ djeljiv sa 10.

3. Zrakoplov leti iz Zagreba u Split i natrag u jednom danu. Pod kakvim uvjetima će zrakoplov relaciju Zagreb-Split-Zagreb prijeći brže:

1. kad je vrijeme mirno i bez vjetra;
2. kad vjetar svo vrijeme puše istom snagom od Zagreba prema Splitu?

4. Dan je kvadar $ABCDEFGH$ tako da je $|AB| = 36$ cm, $|AD| = 14$ cm i $|AE| = 48$ cm. Ako je točka P polovište brida \overline{CG} , koliko je točka P udaljena od ravnine CDE ?

5. Duljina hipotenuze $|AB|$ pravokutnog trokuta ABC je 7 cm, a jedan unutarnji kut jednak je četvrtini pravog kuta. Kolika je površina trokuta ABC ?

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

$$\frac{\frac{2}{3}x - 1}{6} - \frac{\frac{3}{5}x + 7}{8} = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}{5} - \frac{5}{2} \quad / \cdot 120$$

$$20 \left(\frac{2}{3}x - 1 \right) - 15 \left(\frac{3}{5}x + 7 \right) = 24 \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right) - 300 \quad 2 \text{ boda}$$

$$\frac{40}{3}x - 20 - 9x - 105 = 12x + 60 - 300 \quad / \cdot 3 \quad 1 \text{ bod}$$

$$40x - 60 - 27x - 315 = 36x + 180 - 900 \quad 1 \text{ bod}$$

$$-23x = -345 \quad / \cdot \left(-\frac{1}{23} \right) \quad 2 \text{ boda}$$

$$x = 15 \quad 1 \text{ bod}$$

Iz formule za duljinu dijagonale kvadrata $d = a\sqrt{2}$ slijedi da je $a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$, pa je opseg kvadrata $O = 2d\sqrt{2}$. Zato je opseg traženog kvadrata $O = 2 \cdot 15\sqrt{2}$, tj. $30\sqrt{2}$ cm. 3 boda

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Najprije treba odrediti znamenku jedinica svakog od 4 pribrojnika. Očito je da broj $1^{1998} = 1$, pa završava znamenkom 1. 1 bod

U potenciji 2^{1998} imamo 1998 faktora 2, a to je kao da imamo 999 faktora 4. Ako u umnošku imamo paran broj četvorki tada taj umnožak završava na 6, a onda umnožak s neparnim brojem četvorki završava sa 4. Dakle, znamenka jedinica drugog pribrojnika jednaka je 4. 2 boda

Umnožak od 1998 trojki jednak je umnošku od 999 devetki. Umnožak parnog broja devetki završava na 1, pa umnožak s neparnim brojem devetki završava na 9. Slijedi da je znamenka jedinica trećeg pribrojnika jednaka 9. 2 boda

i konačno, znamenka jedinica potencije broja 4 koja ima paran broj četvorki je 6. 2 boda

Kako je $1 + 4 + 9 + 6 = 20$, nužno slijedi da je znamenka jedinica danog zbroja jednaka 0, a to znači da je i dani zbroj djeljiv sa 10. 3 boda

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je a udaljenost između Zagreba i Splita, x brzina zrakoplova pri mirnom vremenu i bez vjetrova, te y brzina vjetra.

1. Zrakoplov će pri mirnom vremenu udaljenost Zagreb–Split–Zagreb prijeći za $\frac{2a}{x}$ sati. 1 bod

2. Pri vjetrovitom vremenu zrakoplov će udaljenost Zagreb–Split prijeći za $\frac{a}{x+y}$ sati, 1 bod

a udaljenost Split–Zagreb za $\frac{a}{x-y}$ sati, 1 bod

pa će ukupno vrijeme leta zrakoplova na relaciji Zagreb–Split–Zagreb biti $\frac{a}{x+y} + \frac{a}{x-y}$, ili, nakon zbrajanja, $\frac{2ax}{x^2-y^2}$ sati. 3 boda

Nakon proširivanja razlomka $\frac{2a}{x}$ sa x , dobivamo $\frac{2ax}{x^2}$. 1 bod

Kako je $\frac{2ax}{x^2-y^2} > \frac{2ax}{x^2}$, jer su brojnici jednaki, a nazivnik prvog razlomka je očito manji, zaključujemo da će zrakoplov brže prijeći navedeni put po mirnom vremenu. 3 boda

..... UKUPNO 10 BODOVA

4.

