MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

8. državno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
Supetar, 5. – 8. svibnja 1999. godine

7. razred

1. Odredi točan dan, sat i minute, kada će do početka 2 000. godine ostati točno:

   a) 2 000 sati,

   b) 2 000 minuta.

2. Koje je godine ovog stoljeća rođena osoba, koja će 1999. godine navršiti onoliko godina koliki je dvostruki zbroj znamenki godine njezinog dvadesetog rođendana?

3. Pet djevojaka, Ana, Ivana, Katarina, Lucija i Marija, sudjelovale su na koncertu na kojem su pjevale pjesme. Svaku su pjesmu otpjevale tri djevojke. Svaku od svojih odabranih pjesama svaka je djevojka otpjevala samo jedanput. Ana je otpjevala najviše, 8, a Ivana najmanje, 5 pjesama.

   Koliko je ukupno pjesama otpjevalo ovih pet djevojaka?

4. Dan je trapez $ABCD$ kojemu su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ osnovice. Točkom M koja je polovište kraka $\overline{AD}$ nacrtana je okomica na pravac BC, pri čemu je točka N nožište te okomice.

   Dokaži da je površina P trapeza $ABCD$ dana s

   $$P(ABCD) = |BC| \cdot |MN|.$$

5. Dan je jednakokračan trokut ABC, pri čemu je $|AC| = |BC|$ i $\angle ACB = 80°$. Unutar trokuta ABC odabrana je točka M, tako da je $\angle MBA = 30°$ i $\angle MAB = 10°$. Koliki je kut $\angle AMC$?

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

1. a) Kako jedan dan ima 24 sata i $2000 = 24 \cdot 83 + 8$, zaključujemo da se od 31. 12. 1999. godine u 24 sata valja vratiti unazad 83 dana i 8 sati, uvažavajući da mjeseci listopad i prosinac imaju 31 dan svaki, a mjesec studeni 30 dana. Zato će 9. listopada 1999. godine točno u 16 sati preostati 2000 sati do početka 2000. godine.

   b) Kako jedan sat ima 60 minuta, a 1 dan ima $24 \cdot 60 = 1440$ minuta, to zbog $2000 = 1440 \cdot 1 + 560$ i $560 = 60 \cdot 9 + 20$, zaključujemo da će 30. prosinca točno u 14 sati i 40 minuta preostati 2000 minuta do početka 2000. godine.

2. Neka je $\overline{19ab}$ godina rođenja, a $\overline{19(a+2)b}$ godina dvadesetog rođendana. Tada vrijedi jednakost $1999 - \overline{19ab} = 2(1 + 9 + a + 2 + b)$, odakle dobivamo redom $99 - (10a + b) = 2(12 + a + b)$, $99 - 10a - b = 24 + 2a + 2b$, $75 = 12a + 3b$, $25 = 4a + b$. Sad je jasno da je znamenka b neparan broj, pa tražene znamenke lako odredimo pomoću tablice

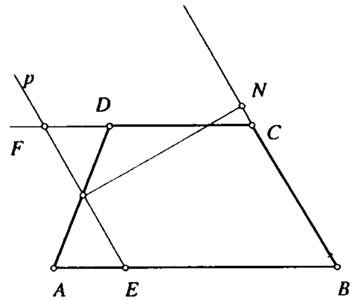
b	1	3	5	7	9
a	6	-	5	-	4

   Prema tome, godine rođenja mogu biti 1961, 1955, 1949.

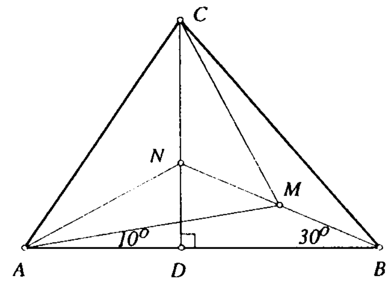
3. Neka su a, b, c, d, e brojevi pjesama koje su otpjevale redom Ana, Ivana, Katarina, Lucija i Marija. Tada je $a = 8$ i $b = 5$. Kako su svaku pjesmu otpjevale tri djevojke, zaključujemo da je ukupan broj otpjevanih pjesama, tj. $a + b + c + d + e$ djeljiv sa 3. Očito zbroj $8 + 5$ nije djeljiv sa 3, već pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 1, pa zaključujemo da zbroj pjesama koje su otpjevale preostale djevojke mora pri dijeljenju s 3 dati ostatak 2. Kako je svaka od preostale tri djevojke otpjevala ili 6 ili 7 pjesama, to valja odrediti zbroj tri pribrojnika iz skupa $\{6, 7\}$ koji pri dijeljenju sa 3 daju ostatak 2. Jedini takav zbroj je $7 + 7 + 6$, tj. 20. Prema tome, pet djevojaka otpjevalo je ukupno 13+20, tj. 33 pjesme.

4. Točkom M nacrtamo pravac $p \| BC$. Neka je E sjecište pravca p i stranice $\overline{AB}$, a točka F sjecište pravca p i pravca CD. Četverokut $EBCF$ je paralelogram. Dokažimo da je $\triangle AEM \cong \triangle MDF$. Imamo $|AM| = |MD|$, $\angle MAE = \angle MDF$, jer su to kutovi s paralelnim kracima i $\angle AME = \angle DMF$, jer su to vršni kutovi. Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $P(AEM) = P(MDF)$. Trapez $ABCD$ i paralelogram $EBCF$ imaju zajednički dio, peterokut $EBCDM$, pa zbog

$P(AEM) = P(MDF)$ slijedi da je $P(ABCD) = P(EBCF)$. Kako je $|EF| = |BC|$, a dužina $\overline{MN}$ visina paralelograma $EBCF$, slijedi da je $P(EBCF) = |BC| \cdot |MN|$, a to znači da je $P(ABCD) = |BC| \cdot |MN|$, što je i trebalo dokazati.



5. Neka je D nožište visine iz vrha C na osnovicu $\overline{AB}$, a N sjecište visine $\overline{CD}$ i pravca BM. Iz uvjeta zadatka lako odredimo da je $\angle CAB = \angle CBA = 50°$ i $\angle ACD = 40°$. Kako točka N leži na visini $\overline{CD}$, tj. na simetrali osnovice $\overline{AB}$ jednakokračnog trokuta ABC, zaključujemo da je trokut ABN jednakokračan, iz čega slijedi da je $\angle NAB = \angle NBA = 30°$ i $\angle ANB = \angle ANM = 120°$. To znači da je $\angle NAM = 20°$ iz čega slijedi da je $\angle CAN = 20°$, pa je $\angle ANC = 120°$. Dalje je $\triangle ANC \cong \triangle ANM$, jer im je $\overline{AN}$ zajednička stranica, $\angle CAN = \angle NAM = 20°$ i$\angle ANC = \angle ANM = 120°$. Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $|AC| = |AM|$, a to znači da je trokut AMC jednakokračan, pa zbog $\angle CAM = 40°$ dobivamo da je $\angle ACM = \angle AMC = 70°$.



MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

8. državno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
Supetar, 5. – 8. svibnja 1999. godine

8. razred

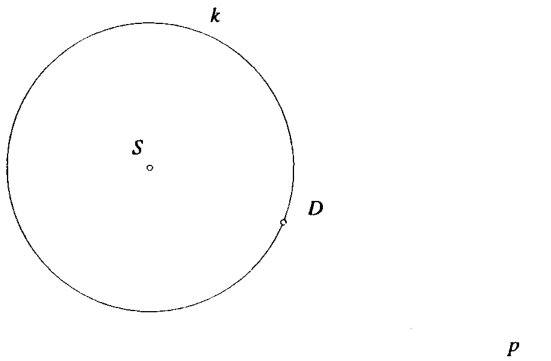
1. Izračunaj

$$1999^2 - 1997^2 + 1995^2 - 1993^2 + \ldots + 7^2 - 5^2 + 3^2 - 1^2.$$

2. Odredi najveći troznamenkasti broj s različitim znamenkama iz skupa $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, tako da je zbroj svih troznamenkastih brojeva koji se dobivaju premještanjem njegovih znamenki jednak 2220.

3. Odredi sve cijele brojeve n za koje je $\sqrt{n^2 + 4n - 5}$ također cijeli broj.

4. Dani su kružnica k sa središtem S, točka D na kružnici k i pravac p koji s kružnicom k nema zajedničkih točaka, kao na slici. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje kružnicu k u točki D i pravac p. Koliko ima rješenja?



5. Dan je pravokutni trokut ABC, kojemu su duljine kateta $|AC| = 7$ i $|BC| = 4$. Na hipotenuzi $\overline{AB}$ odabrana je neka točka D. Neka je točka M težište trokuta ADC, a točka N težište trokuta BCD. Kolika je površina trokuta CMN?

   (Težište trokuta je točka u kojoj se sijeku tri dužine, kojima je jedna rubna točka vrh trokuta, a druga rubna točka polovište nasuprotne stranice.)

Rješenja 8. razred

1. Očito je da zadani broj sadrži 500 razlika kvadrata. Zato zadani zbroj možemo pisati redom:

$$1999^2 - 1997^2 + 1995^2 - 1993^2 + \ldots + 3^2 - 1^2 =$$

$$= (1999-1997)(1999+1997)+(1995-1993)(1995+1993)+\ldots+(3-1)(3+1)$$

$$= 2(1999 + 1997 + 1995 + \ldots 3 + 1).$$

Zbrojimo li u zagradi prvi i zadnji pribrojnik, pa drugi i predzadnji pribrojnik i tako dalje, dobit ćemo 500 zbrojeva jednakih 2000. Zato je zadani zbroj jednak $2 \cdot 500 \cdot 2\,000 = 2\,000\,000$.

2. Neka je $\overline{abc}$ traženi troznamenkasti broj. Premještanjem njegovih znamenki dobivamo 6 različitih troznamenkastih brojeva. Svaka od tri znamenke pojavljuje se na svakom od tri dekadska mjesta točno 2 puta. Zato je zbroj svih šest promatranih troznamenkastih brojeva jednak $2(a+b+c) \cdot 100 + 2(a+b+c) \cdot 10 + 2(a+b+c) \cdot 1 = 2220$, odnosno $222(a+b+c) = 2220$, tj. $a+b+c = 10$. Dalje imamo:

   1. Ako je $a = 9$, onda je $b + c = 1$, pa je ili $b = 0$ ili $c = 0$, što ne može biti.

   2. Ako je $a = 8$, onda je $b + c = 2$, pa je ili $b = c = 1$ ili $b = 2$ i $c = 0$ ili $c = 2$ ili $b = 0$, što opet ne može biti.

   3. Ako je $a = 7$, onda je $b + c = 3$, pa je $b = 2$ i $c = 1$.

   Traženi troznamenkasti broj je 721.

3. Neka je $\sqrt{n^2 + 4n - 5} = m$. Ako ovu jednakost kvadriramo, a zatim lijevoj i desnoj strani jednakosti dodamo 9, tada lako možemo postići da lijeva strana jednakosti bude jednaka razlici kvadrata. Zato dobivamo redom $n^2 + 4n - 5 = m^2$, $n^2 + 4n - 5 + 9 = m^2 + 9$, $n^2 + 4n + 4 - m^2 = 9$ ili $(n+2)^2 - m^2 = 9$, tj. $(n + 2 - m)(n + 2 + m) = 9$. Faktori na lijevoj strani jednakosti su iste parnosti i istog predznaka, tj. oba su faktora neparni cijeli brojevi. Zbog $m \geq 0$ imamo ove moguće slučajeve:

   $n - m + 2 = 1 \quad n - m + 2 = -9 \quad n - m + 2 = 3 \quad n - m + 2 = -3$

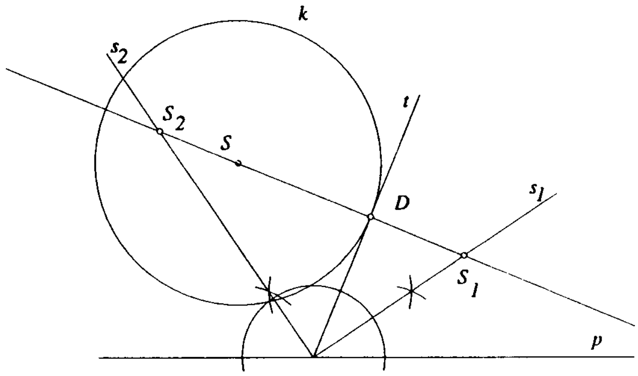
   $n + m + 2 = 9 \quad n + m + 2 = -1 \quad n + m + 2 = 3 \quad n + m + 2 = -3$

   Lako nalazimo da su traženi cijeli brojevi su: $n = -7, n = -5, n = 1, n = 3$.

4. *Analiza.* Očito je da se središte kružnice mora nalaziti na pravcu SD. Ako se dvije kružnice dodiruju izvana ili iznutra, tada te dvije kružnice imaju zajedničku tangentu u diralištu. U našem je slučaju to točka D. Neka je pravac t zajednička tangenta dane i tražene kružnice u točki D. Sad je jasno da tražena kružnica treba dodirivati pravac p i tangentu t. Prema poučku o simetrali kuta slijedi da se središte tražene kružnice nalazi na simetrali kuta koji zatvaraju pravac p i tangenta t. Ovim je konstrukcija tražene kružnice određena.

   Konstrukcija. U točki D konstruiramo tangentu t na kružnicu k, pri čemu je $t \perp SD$. Zatim konstruiramo simetralu s kuta koji zatvaraju pravac p i tangenta t. Sjecište simetrale s i pravca SD je središte tražene kružnice, a polumjer je jednak udaljenosti tog sjecišta i točke D.

   Rasprava. Kako tangenta t i pravac p zatvarju dva kuta, slijedi da imamo dvije kružnice koje dodiruju danu krúžnicu k u točki D i pravac p, pa zadatak ima dva rješenja.



5. Neka je točka E polovište stranice $\overline{AD}$ i točke F polovište stranice $\overline{BD}$. Tada je $\overline{CE}$ težišnica trokuta ADC, a $\overline{CF}$ težišnica trokuta BCD. Kako je $|AE| = |ED|$ i $|DF| = |BF|$, prema definiciji težišnice, slijedi da je $|ED| + |DF| = \frac{1}{2}|AB|$, a to znači da je $P(CEF) = \frac{1}{2}P(ABC)$, a zbog $P(ABC) = \frac{|AC|\cdot|BC|}{2}$ ili $P(ABC) = 14$ dobivamo da je $P(CEF) = 7$. Dalje valja uočiti da je $\triangle CMN \sim \triangle CEF$. Naime, znamo da težište dijeli težišnicu u omjeru $1:2$, pa je $\frac{|CM|}{|CE|} = \frac{|CN|}{|CF|} = \frac{2}{3} = k$, pri čemu je kut $\angle MCN = \angle ECN$ zajednički za oba trokuta, što je dovoljno za dokaz navedene sličnosti. Iz dokazane sličnosti trokuta slijedi da je $\frac{P(CMN)}{P(CEF)} = k^2$, odnosno $\frac{P(CMN)}{P(CEF)} = \frac{4}{9}$. Zato je $P(CMN) = \frac{4}{9}\cdot P(CEF) = \frac{28}{9}$.