MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko – gradsko natjecanje učenika osnovnih škola Republike Hrvatske 5. ožujka 1999. godine

8. razred

1. Racionaliziraj i skrati razlomak:

$$\frac{8+2\sqrt{2}}{4+\sqrt{128}}.$$

2. U nekom razlomku nazivnik je za 3 veći od brojnika. Ako brojnik tog razlomka povećamo za 2, a nazivnik povećamo 3 puta, tada je zbroj tako dobivenog razlomka s početnim razlomkom jednak 1. Koliki je početni razlomak?

3. Duljine stranica pravokutnog trokuta prirodni su brojevi, pri čemu je duljina jedne katete 15. Kolike su duljine ostalih stranica takvog pravokutnog trokuta?

   Koliko ima različitih pravokutnih trokuta s tim svojstvom?

4. U jednakokračnom trapezu $ABCD$ stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ su osnovice, $|AD| = 18$ cm, $\sphericalangle BAD = 75°$ i $|AB| = 2 \cdot |CD|$. Kolika je površina trapeza $ABCD$?

5. Dan je pravokutnik $ABCD$ kome su duljine dviju susjednih stranica 16 cm i 12 cm. Simetrala dijagonale $\overline{BD}$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E, a stranicu $\overline{CD}$ u točki F. Kolika je duljina dužine $\overline{EF}$?

199 opć.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $\frac{8+2\sqrt{2}}{4+8\sqrt{2}}=\frac{8+2\sqrt{2}}{4+8\sqrt{2}}\cdot\frac{4-8\sqrt{2}}{4-8\sqrt{2}}=\frac{-56\sqrt{2}}{-112}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

. ...UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je x brojnik početnog razlomka. Tada je $x+3$ njegov nazivnik, a $\frac{x}{x+3}$ početni razlomak. Nakon povećanja brojnika i nazivnika dobivamo novi razlomak $\frac{x+2}{3(x+3)}$.

Zato vrijedi jednakost

$$\frac{x}{x+3}+\frac{x+2}{3(x+3)}=1.$$

4 boda

Nakon proširivanja prvog razlomka s 3 i zbrajanjem dobivamo nove jednakosti:

$$\frac{3x}{3(x+3)}+\frac{x+2}{3(x+3)}=1,\ \frac{4x+2}{3(x+3)}=1\,.$$

2 boda

Razlomak ima vrijednost 1 samo ako je brojnik jednak nazivniku, pa je $4x+2=3(x+3)$. 2 boda

Rješenje ove jednadžbe je $x=7$. 1 bod

Početni razlomak je $\frac{7}{10}$. 1 bod

. ...UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka su a i b duljine kateta, a c neka je duljina hipotenuze.

Tada je $c^2-a^2=15^2$, odnosno $(c-a)(c+a)=225$, tj. $(c-a)(c+a)=3\cdot3\cdot5\cdot5$, pri čemu je $c-a<c+a$. 3 bod

Kako je umnožak 225 neparan, zaključujemo da su $c-a$ i $c+a$ dva neparna broja. Zato valja riješiti ove sustave jednadžbi

$c-a=1$	$c-a=3$	$c-a=5$	$c-a=9$
$c+a=225$	$c+a=75$	$c+a=45$	$c+a=25$
Rješenja su			
$a=112$	$a=36$	$a=20$	$a=8$
$c=113$	$c=39$	$c=25$	$c=17$

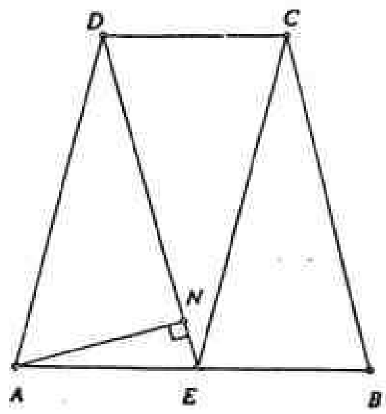
6 bodova.

Ukupno ima 4 različita pravokutna trokuta i to:

15,112,113; 15,36,39; 15,20,25; 8,15,17. 1 bod

. ...UKUPNO 10 BODOVA

4.



Skica 1 bod

Neka je E polovište dulje osnovice $\overline{AB}$. Tada je $|AB|=2c$, pri čemu je $|CD|=c$. U jednakokračnom trokutu AED povucimo visinu iz vrha A na stranicu $\overline{DE}$. Kako je $\sphericalangle DAE=75^\circ$ i trokut AED je jednakokračan, slijedi da je $\sphericalangle AED=75^\circ$, pa je $\sphericalangle NAE=90^\circ-\sphericalangle AEN=15^\circ$ i $\sphericalangle DAN=60^\circ$. 4 boda

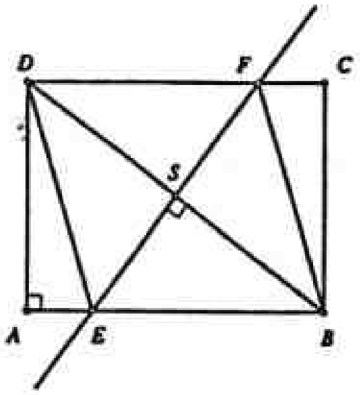
Trokut DAN je polovica jednakostraničnog trokuta sa stranicom $\overline{AD}$, pa je $|AN|=9$. 1 bod

Sada možemo izračunati površinu trokuta AED: $P=\frac{|ED|\cdot|AN|}{2}=\frac{18\cdot9}{2}=81\text{cm}^2$. 2 boda

Trokuti AED, BEC i CDE su sukladni, pa je površina trapeza $P=3\cdot81=243\text{cm}^2$. 2 boda

. ...UKUPNO 10 BODOVA

5.



Skica 1 bod

Neka je $|AB| = 16$ cm, $|AD| = 12$ cm i neka je $|AE| = x$. Tada je $|BE| = |DE| = 16 - x$, jer točka E leži na simetrali dijagonale $\overline{BD}$. Najprije primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ABD lako odredimo duljinu dijagonale $|BD|$. $|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 = 16^2 + 12^2 = 400$, $|BD| = 20$ cm. 1 bod

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut DAE dobivamo $|DE|^2 = |AD|^2 + |AE|^2$, tj. $(16 - x)^2 = 12^2 + x^2$. Rješenje jednadžbe je $x = 3.5$ cm, pa je $|BE| = |DE| = 12.5$ cm. 3 boda

Dalje možemo zaključivati na razne načine.

1. način. Neka je S točka presjeka dijagonale $\overline{BD}$ i njezine simetrale. Tada je $|DS| = |BS| = 10$ cm, ali i $|SE| = |SF|$, jer je pravokutnik centralnosimetričan lik obzirom na točku S.

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ESD dobivamo $|SE|^2 = |DE|^2 - |SD|^2$, $|SE|^2 = 12.5^2 - 10^2$ i konačno $|SE| = 7.5$ cm. 3 boda

Prema tome, $|EF| = |SE| + |SF| = 2|SE| = 2 \cdot 7.5 = 15$ cm. 2 boda

2. način.

Četverokut $EBFD$ je paralelogram. Dovoljno je dokazati da je $|EB| = |DF|$, a to se može na razne načine, recimo preko centralne simetrije. Kako je $EF \perp BD$, duljinu dužine $\overline{EF}$ možemo izračunati preko površine romba. Naime, $|EB| \cdot |AD| = \dfrac{|BD| \cdot |EF|}{2}$, $12.5 \cdot 12 = \frac{20 \cdot |EF|}{2}$, pa je $|EF| = 15$ cm. 5 bodova.

....UKUPNO 10 BODOVA