ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Supetar, 5. – 8 . svibnja 1999. godine

I. razred

1. Kružnice k_1 i k_2 polumjera $r_1 = 6$ i $r_2 = 3$ dodiruju se izvana. Obje kružnice dodiruju iznutra kružnicu k polumjera $r = 9$. Zajednička vanjska tangenta kružnica k_1 i k_2 siječe kružnicu k u točkama P i Q. Izračunajte duljinu tetive $\overline{PQ}$.

2. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokažite da vrijedi nejednakost
$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{2}.$$

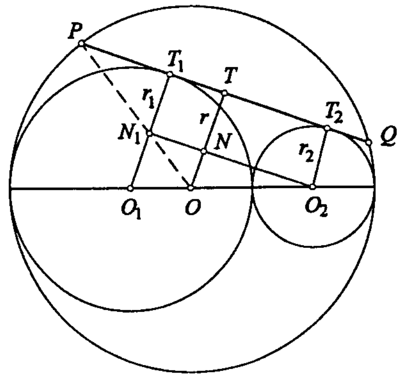
3. Dokažite da je za svaki $a \in (1,2)$ površina lika kojeg omeđuju grafovi funkcija
$$y = 1 - |x-1| \quad \text{i} \quad y = |2x-a|,$$
manja od $\frac{1}{3}$.

4. Dana je trojka $(a_1, a_2, a_3) = (3, 4, 12)$. Provodimo sljedeći postupak: biramo dva broja a_i i a_j, $(i \neq j)$, te ih zamijenimo sa $0.6a_i - 0.8a_j$ i $0.8a_i + 0.6a_j$. Može li se višekratnom primjenom gore opisanog postupka dobiti trojka $(2, 8, 10)$?

Rješenja za I. razred

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Neka su O, O_1, O_2 središta kružnica k, k_1, k_2, s polumjerima $r = 9$, $r_1 = 6$, $r_2 = 3$, a T, T_1, T_2 nožišta okomica iz točaka O, O_1 i O_2 na tangentu PQ. Neka su N i N_1 redom točke u kojima paralela s tangentom kroz O_2 siječe dužine $\overline{OT}$ i $\overline{O_1T_1}$. Pritom je $|O_1N_1| = 3$, $|O_1O_2| = 9$, $|OO_2| = 6$.



Iz $\triangle O_1O_2N_1 \sim \triangle OO_2N$ slijedi

$$\frac{|ON|}{|O_1N_1|} = \frac{|OO_2|}{|O_1O_2|},$$

pa je

$$|ON| = |O_1N_1| \cdot \frac{|OO_2|}{|O_1O_2|} = 2.$$

Stoga je $|OT| = |ON| + |NT| = 5$, pa duljinu $|PQ|$ možemo odrediti pomoću Pitagorinog poučka za trokut POT:

$$|PQ| = 2|PT| = 2\sqrt{|OP|^2 - |OT|^2} = 2\sqrt{9^2 - 5^2} = 4\sqrt{14}.$$

2.

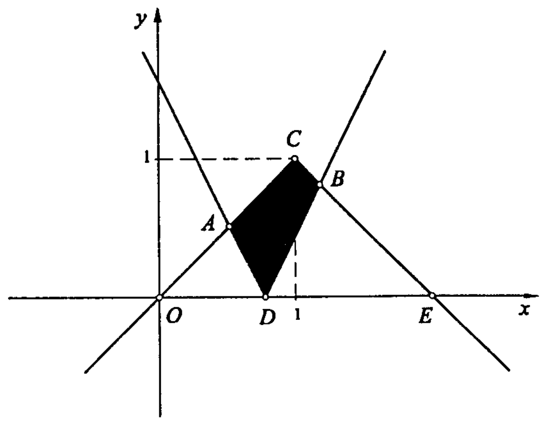
$$\begin{aligned}
& \frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \\
= & \left(a - \frac{ab^2}{a^2+b^2}\right) + \left(b - \frac{bc^2}{b^2+c^2}\right) + \left(c - \frac{ca^2}{c^2+a^2}\right) \\
= & \; a - \frac{b}{2} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} + b - \frac{c}{2} \cdot \frac{2bc}{b^2+c^2} + c - \frac{a}{2} \cdot \frac{2ca}{c^2+a^2} \\
\geq & \; a - \frac{b}{2} + b - \frac{c}{2} + c - \frac{a}{2} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3. Nađimo najprije zajedničke točke danih funkcija. Riješimo jednadžbu

$$|2x - a| = 1 - |x - 1|. \qquad (1)$$

Kako je $1 < a < 2$, vrijedi $\frac{a}{2} < 1$ i moramo promatrati tri slučaja $1^\circ \quad x \leq \frac{a}{2}$, $2^\circ \quad \frac{a}{2} < x < 1$ i $3^\circ \quad x \geq 1$. Sada redom imamo:

1° Kada je $x \leq \frac{a}{2}$ jednadžba (1) poprima oblik $a - 2x = x$. Dobiva se $x = \frac{a}{3}$, što zadovoljava (1) jer je $\frac{a}{3} < \frac{a}{2}$.
2° Kada je $\frac{a}{2} < x < 1$ jednadžba (1) poprima oblik $2x - a = x$, tj. $x = a$, što ne zadovoljava jer je $a > 1$.
3° Ako je $x \geq 1$ jednadžba (1) poprima oblik $2x - a = 2 - x$. Odavde se dobiva $x = \frac{a+2}{3}$, što zadovoljava (1), jer je $\frac{a+2}{3} > 1$ zbog $a > 1$.
Dakle, grafovi dviju danih funkcija imaju dvije zajedničke točke (vidi sliku); prvu označimo s A i ona ima koordinate $x_A = \frac{a}{3}$, $y_A = \frac{a}{3}$, dok druga (koju označimo s B) ima koordinate $x_B = \frac{a+2}{3}$, $y_B = 2 - x = 2 - \frac{a+2}{3} = \frac{4-a}{3}$. Neka je $C(1,1)$, $D(\frac{a}{2}, 0)$, $E(2,0)$.



Lik kojeg omeđuju grafovi danih funkcija je četverokut $ABCD$ i njegova površina se dobije oduzimanjem od površine trokuta OEC površina trokuta ODA i BDE. Dakle,

$$
\begin{aligned}
P &= P_{OEC} - P_{ODA} - P_{BDE} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot |OD| \cdot y_A - \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot y_B \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{4-a}{3} \\
&= 1 - \tfrac{1}{12} \cdot a^2 - \tfrac{1}{12} \cdot (4-a)^2 \\
&= \frac{1}{6}\left(-a^2 + 4a - 2\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(2 - (a-2)^2\right) < \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

4. Ovaj zadatak ćemo riješiti pomoću jedne invarijante. Ovdje je ta invarijanta zbroj kvadrata brojeva. Naime,

$$(0.6a_i - 0.8a_j)^2 + (0.8a_i + 0.6a_j)^2 = a_i^2 + a_j^2,$$

tj. suma kvadrata brojeva ostaje konstantnom. Na početku je suma kvadrata iznosila $3^2 + 4^2 + 12^2 = 169$. Kako je $2^2 + 8^2 + 10^2 = 168$, ne može se doći do brojeva $(2, 8, 10)$.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Supetar, 5. - 8. svibnja 1999. godine

II. razred

1. Neka su L i M redom točke u kojima simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta iz vrha C trokuta ABC sijeku pravac AB. Ako je $|CL| = |CM|$, dokažite da je $|AC|^2 + |BC|^2 = 4R^2$, gdje je R duljina polumjera kružnice opisane trokutu ABC.

2. U zavisnosti o parametru a nađite rješenja jednadžbe

$$x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0.$$

Za koje realne brojeve a su sva rješenja realna?

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite nejednakost

$$a^{b+c}\, b^{c+a}\, c^{a+b} \leq 1.$$

4. Na jednom turniru sudjelovalo je n košarkaških ekipa. Svaka ekipa odigrala je sa svakom drugom točno jednu utakmicu. Neriješenih ishoda nije bilo. Ako na kraju turnira i-ta ekipa ima x_i pobjeda i y_i poraza ($i = 1, 2, \ldots, n$), dokažite da je

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

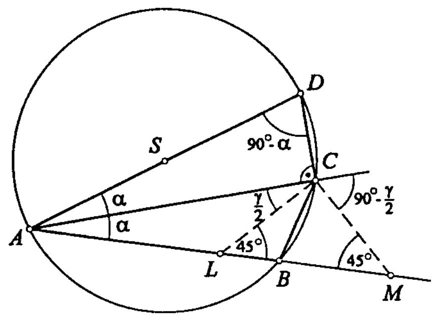
Rješenja za II. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Možemo uzeti da je $|AC| > |BC|$, pa vanjska simetrala siječe pravac AB bliže točki B. Kut između unutarnje i vanjske simetrale je pravi, dakle $\sphericalangle LCM = 90°$. Zbog $|CM| = |CL|$ trokut CLM ima kutove $90°$, $45°$, $45°$. Označimo kutove trokuta ABC s α, β i γ kao na slici. Iz trokuta LBC imamo

$$\frac{\gamma}{2} + \beta + 45° = 180°$$

i zbog $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ slijedi

$$\alpha = \beta - 90°.$$



Neka je točka D na opisanoj kružnici takva da je $\overline{AD}$ promjer. S obzirom da je kut β tup, točka D leži na onom luku $\overset{\frown}{AC}$ koji ne sadrži točku B. Dovoljno je dokazati da je $|BC| = |CD|$ jer tada tvrdnja zadatka slijedi iz Pitagorinog poučka:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 + |CD|^2 = (2R)^2.$$

Vrijedi $\sphericalangle ACD = 90°$ (jer je $\overline{AD}$ promjer), i $\sphericalangle ADC = 180° - \beta$ (jer je $ABCD$ tetivni četverokut), pa je $\sphericalangle CAD = 180° - \sphericalangle ACD - \sphericalangle ADC = 180° - 90° - (180° - \beta) = \beta - 90° = \alpha$.
Kako su tetive nad jednakim obodnim kutovima jednake, slijedi $|BC| = |CD|$. Time je tvrdnja dokazana.

2. Riješimo jednadžbu po a:

$$a^2 - a(2x^2 + 1) + x^4 + x = 0.$$

Rješenja su:

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2+1)^2 - 4(x^4 + x)}}{2} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x - 1)}{2},$$

$$a_1 = x^2 + x, \qquad a_2 = x^2 - x + 1.$$

Zbog toga lijevu stranu jednadžbe možemo faktorizirati:

$$x^4 - 2ax + x + a^2 - a = (x^2 - x + 1 - a)(x^2 + x - a).$$

Korijeni kvadratnih faktora su:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{4a-3}}{2},\qquad x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$$

Sva su rješenja realna za $a\geq\frac{3}{4}$.

3. Napišimo izraz s lijeve strane nejednakosti u pogodnijem obliku

$$a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}=\frac{a^{a+b+c}\cdot b^{a+b+c}\cdot c^{a+b+c}}{a^ab^bc^c}=\frac{(abc)^{a+b+c}}{a^ab^bc^c}=\frac{1}{a^ab^bc^c}.$$

Dokazat ćemo da je $a^ab^bc^c\geq 1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $a\leq b\leq c$. Kako a,b,c ne mogu istovremeno svi biti manji od 1 ili istovremeno svi veći od 1 ostaju ove dvije mogućnosti:

(1°) $a\leq b\leq 1\leq c$. Stavimo $c=\dfrac{1}{ab}$ pa je

$$a^ab^bc^c=\frac{a^ab^b}{a^cb^c}=\left(\frac{1}{a}\right)^{c-a}\left(\frac{1}{b}\right)^{c-b}\geq 1,$$

jer su u posljednjem produktu baze veće od 1, a eksponenti su nenegativni.

(2°) $a\leq 1\leq b\leq c$. Stavimo $a=\dfrac{1}{bc}$ pa na isti način vrijedi

$$a^ab^bc^c=\frac{b^bc^c}{b^ac^a}=b^{b-a}c^{c-a}\geq 1.$$

Ovim je tvrdnja dokazana.

4. Očito vrijedi $x_i+y_i=n-1$, $(i=1,2,\ldots,n)$ jer je svaka ekipa odigrala $n-1$ utakmicu, te

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{n(n-1)}{2},$$

jer je ukupan broj pobjeda jednak ukupnom broju poraza i jednak ukupnom broju odigranih utakmica.
Odavde slijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 &= \sum_{i=1}^{n}((n-1)-y_i)^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}(n-1)^2-2(n-1)\sum_{i=1}^{n}y_i+\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2\\
&= n(n-1)^2-2(n-1)\frac{n(n-1)}{2}+\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2\\
&= n(n-1)^2-n(n-1)^2+\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}{y_i}^2
\end{aligned}$$

a to je i trebalo pokazati.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Supetar, 5. – 8. svibnja 1999. godine

III. razred

1. Trokut ABC s kutevima α, β, γ upisan je u pravokutnik $APQR$ tako da točka B leži na stranici $\overline{PQ}$, a točka C na stranici $\overline{QR}$. Dokažite da je

$$\mathrm{ctg}\alpha \cdot P(BCQ) = \mathrm{ctg}\beta \cdot P(ACR) + \mathrm{ctg}\gamma \cdot P(ABP).$$

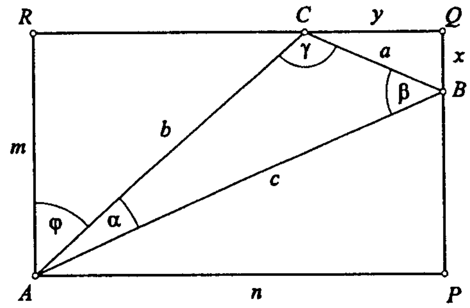
2. Baza piramide $ABCDV$ je pravokutnik $ABCD$ čije su duljine stranica $|AB| = a$ i $|BC| = b$, a svi bočni bridovi su duljine c. Odredite površinu presjeka te piramide ravninom koja prolazi dijagonalom $\overline{BD}$ baze i paralelna je bočnom bridu $\overline{VA}$.

3. Za duljine a, b i c stranica trokuta vrijedi $a \geq b \geq c$. Vrhovi trokuta središta su triju krugova s nenegativnim polumjerima. Nikoja dva kruga nemaju zajedničkih unutarnjih točaka, niti obuhvaćaju neki od preostala dva vrha trokuta. Kolika je maksimalna površina koju pokrivaju ti krugovi?

4. Možemo li iz svakog deveteročlanog podskupa skupa prirodnih brojeva odabrati četiri različita elementa a, b, c i d, tako da brojevi $a+b$ i $c+d$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 20 ?

Rješenja za III. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.*
Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC, te neka je $|AR| = m$, $|AP| = n$ te $|BQ| = x$, $|CQ| = y$.



Tada je $a^2 = x^2 + y^2$, $b^2 = m^2 + (n-y)^2$, $c^2 = n^2 + (m-x)^2$.
Prema kosinusovom poučku je $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, odnosno

$$\cos\alpha = \frac{m^2 + n^2 - mx - ny}{bc}.$$

Također, iz $P(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ zbog

$$P(ABC) = P(APQR) - P(ABP) - P(BCQ) - P(ACR)$$

dobivamo

$$\sin\alpha = \frac{my + nx - xy}{bc}.$$

Konačno dobivamo

$$\text{ctg}\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4P(ABC)} = \frac{m^2 + n^2 - mx - ny}{my + nx - xy}.$$

Na sličan način se dobije

$$\text{ctg}\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4P(ABC)} = \frac{x^2 - mx + ny}{my + nx - xy}$$

i

$$\text{ctg}\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4P(ABC)} = \frac{y^2 + mx - ny}{my + nx - xy}.$$

Izračunavanjem desne strane dane jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}
&\text{ctg}\beta \cdot \frac{m(n-y)}{2} + \text{ctg}\gamma \cdot \frac{n(m-x)}{2} \\
&= \frac{x^2 - mx + ny}{nx + my - xy} \cdot \frac{m(n-y)}{2} + \frac{y^2 + mx - ny}{my + nx - xy} \cdot \frac{n(m-x)}{2} \\
&= \frac{xy(m^2 + n^2 - mx - ny)}{2(my + nx - xy)},
\end{aligned}$$

što je zbog $P(BCQ) = \frac{xy}{2}$ jednako $\text{ctg}\alpha \cdot P(BCQ)$.

Drugo rješenje.

Neka je $\varphi = \sphericalangle CAR$. Tada je $\sphericalangle PBA = \alpha + \varphi$ i $\sphericalangle QBC = \gamma - \varphi$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{ctg}\alpha \cdot P(BCQ) &= \frac{|QC| \cdot |BQ| \cdot \mathrm{ctg}\alpha}{2} = \frac{a^2 \sin(\gamma - \varphi)\cos(\gamma - \varphi)\cos\alpha}{2\sin\alpha} \\
&= \frac{a^2 \sin(2\gamma - 2\varphi)\sin 2\alpha}{8\sin^2\alpha} = \frac{R^2 \sin(2\gamma - 2\varphi)\sin 2\alpha}{2} \\
&= \frac{R^2}{4}[\cos(2\gamma - 2\alpha - 2\varphi) - \cos(2\alpha + 2\gamma - 2\varphi)],
\end{aligned}$$

gdje smo sa R označili polumjer kružnice opisane trokutu ABC. Slično je

$$\begin{aligned}
\mathrm{ctg}\beta \cdot P(ACR) &= \frac{|AR| \cdot |RC| \cdot \mathrm{ctg}\beta}{2} = \frac{b^2 \sin 2\varphi \sin 2\beta}{8\sin^2\beta} = \frac{R^2 \sin 2\varphi \sin 2\beta}{2} \\
&= \frac{R^2}{4}[\cos(2\beta - 2\varphi) - \cos(2\beta + 2\varphi)],
\end{aligned}$$

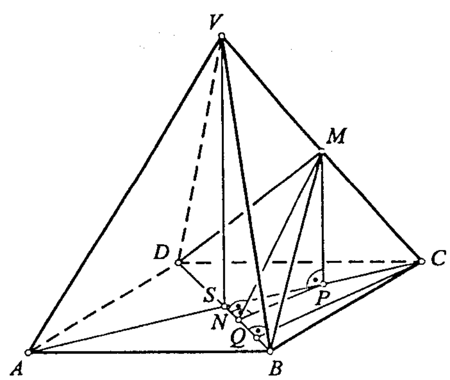
odnosno

$$\begin{aligned}
\mathrm{ctg}\gamma \cdot P(ABP) &= \frac{|AP| \cdot |PB| \cdot \mathrm{ctg}\gamma}{2} = \frac{c^2 \sin(2\alpha + 2\varphi)\sin 2\gamma}{8\sin^2\gamma} \\
&= \frac{R^2 \sin(2\alpha + 2\varphi)\sin 2\gamma}{2} \\
&= \frac{R^2}{4}[\cos(2\gamma - 2\alpha - 2\varphi) - \cos(2\alpha + 2\gamma + 2\varphi)].
\end{aligned}$$

Sada uvrštavanjem i koristeći $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ lako provjerimo danu jednakost.

2. *Prvo rješenje.*

Ravninu presjeka nazovimo π. Neka je S središte baze, a M točka u kojoj ravnina π siječe brid $\overline{VC}$. Presjek trokuta VAC i ravnine π je očito dužina $\overline{MS}$, a kako je π paralelna s VA, mora biti i $MS \parallel VA$ pa je M polovište brida VC. Treba odrediti površinu presjeka, tj. trokuta BDM.



$\overline{BM}$ je težišnica trokuta BCV, pa je $|BM| = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + c^2}$.
$\overline{DM}$ je težišnica trokuta DCV, pa je $|DM| = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + c^2}$.
Površina trokuta sa stranicama a, b, c je (iz Heronove formule)

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}.$$

Odatle dobivamo

$$P = \frac{1}{8}\sqrt{4c^2(a^2 + b^2) - (b^2 - a^2)^2}.$$

Drugo rješenje.

Površinu trokuta BDM možemo izračunati i pomoću formule $P = \frac{1}{2}|BD|\cdot|MN|$, gdje je N projekcija točke M na pravac BD. Neka je $d = |BD|$ i $x = |SN|$. Pretpostavimo da je $|MB| \leq |MD|$. Odredimo duljinu visine $|MN|$. Iz

$$|MN|^2 = |MB|^2 - (\frac{d}{2} - x)^2 = |MD|^2 - (\frac{d}{2} + x)^2$$

dobivamo

$$x = \frac{|MD|^2 - |MB|^2}{2d}.$$

Stoga je

$$|MN|^2 = \frac{2a^2b^2 - a^4 - b^4 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2}{16(a^2 + b^2)}.$$

Treće rješenje.

Površinu trokuta BDM ćemo izračunati pomoću formule $P = \frac{1}{2}|BD| \cdot |MN|$, a duljinu $|MN|$ ćemo izraziti iz trokuta MNP, gdje je P projekcija točke M na ravninu baze. Iz sličnosti trokuta MPC i VSC dobivamo

$$|MP| = \frac{1}{2}|VS| = \frac{1}{4}\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}.$$

Vrijedi i

$$|NP| = \frac{1}{2}|CQ| = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{d} = \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Sada iz $|MN| = \sqrt{|MP|^2 + |NP|^2}$ izračunamo visinu i konačno površinu trokuta BDM.

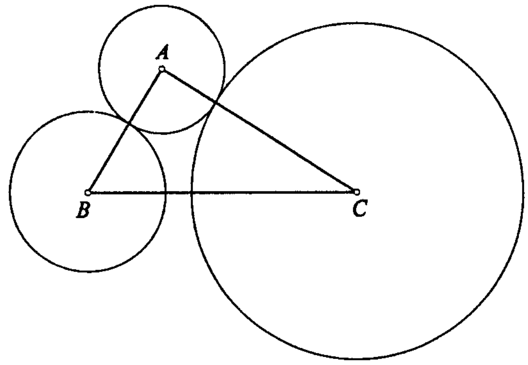
3. Neka su r_A, r_B i r_C polumjeri kružnica sa središtima A, B, C redom, za koje se postiže maksimalna površina. Najprije pokažimo da mora biti $r_A \leq r_B \leq r_C$. Pretpostavimo da je $r_A > r_B$. Tvrdimo da tada oko točke A možemo opisati kružnicu polumjera r_B, a oko točke B kružnicu polumjera r_A, tako da se krugovi ne preklapaju. Zaista, ako bismo to učinili, imali bi

$$\begin{aligned} r_A + r_C &\leq b \leq a \\ r_B + r_C &\leq r_A + r_C \leq b \\ r_A + r_B &\leq c \end{aligned}$$

Kako je $r_C \leq \min\,(b - r_A, a - r_B)$, a $\min\,(a - r_A, b - r_B) > r_C$ (zbog $a - r_A > b - r_B \geq r_C$ i $b - r_B > b - r_A \geq r_C$), slijedi da možemo povećati r_C, a time i ukupnu površinu, pa zaključujemo da mora biti $r_A \leq r_B$.

Na sličan način pokazujemo da je $r_B \leq r_C$.

Jasno je da se maksimalna površina postiže u slučaju da jedna od kružnica dodiruje preostale dvije. Pokažimo da je to najveća kružnica. U protivnom bi bila moguća dva slučaja: (i) kružnica s polumjerom r_A dira ostale dvije (sl. 1); (ii) kružnica s polumjerom r_B dira ostale dvije (sl. 2).

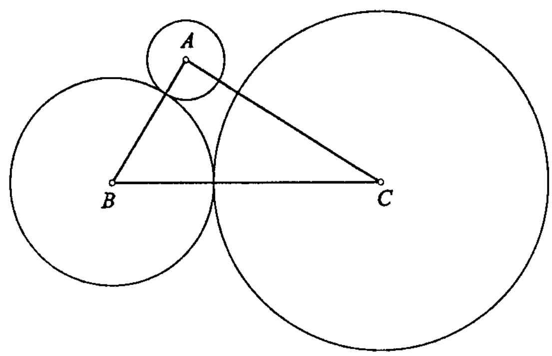


(i) Ako povećamo r_B za neki $x > 0$, i istovremeno smanjimo r_A za taj x, dobijemo veću površinu, pa slijedi da veću površinu dobijemo ako kružnica s polumjerom r_B dira preostale dvije, tj. u slučaju (ii). Naime

$$(r_A - x)^2 + (r_B + x)^2 + r_C^2 > r_A^2 + r_B^2 + r_C^2,$$

jer je ta nejednakost ekvivalentna s

$$2x(r_B - r_A) + 2x^2 > 0.$$



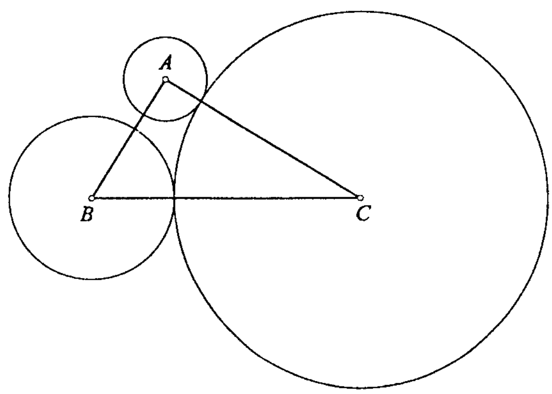
(ii) Ako povećamo r_C za neki $x > 0$, i istovremeno smanjimo r_B za taj x, dobijemo opet veću površinu zbog

$$r_A^2 + (r_B - x)^2 + (r_C + x)^2 > r_A^2 + r_B^2 + r_C^2,$$

što je ekvivalentno s

$$2x(r_C - r_B) + 2x^2 > 0.$$

Zaključujemo da je dovoljno promatrati slučaj kada najveća kružnica dira druge dvije (sl. 3).



Neka je $x = r_C$. Tada je $r_A = b - x$ i $r_B = a - x$. Mora biti $x \in [\frac{a}{2}, b]$. (Znamo da mora biti i $x \geq \frac{a+b-c}{2}$, zbog $r_A + r_B \leq c$.) Sada je tražena površina jednaka

$$P = \pi[(b-x)^2 + (a-x)^2 + x^2].$$

Ova kvadratna funkcija poprima maksimum na jednom od rubova. Vrijedi

$$P_1 = P\left(\frac{a}{2}\right) = \pi\left[\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}\right]$$

$$P_2 = P(b) = \pi[(a-b)^2 + b^2]$$

$$\frac{1}{\pi}(P_2 - P_1) = (a-b)^2 + b^2 - \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} = \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Stoga je maksimum $P(b) = \pi[(a-b)^2 + b^2]$, a postiže se za $r_A = 0$, $r_B = a - b$, $r_C = b$.

4. Dovoljno je promatrati ostatke tih brojeva pri dijeljenju s 20.
(i) Ako u deveteročlanom podskupu postoje međusobno različiti brojevi a, b, c i d tako da je $a \equiv c \pmod{20}$ i $b \equiv d \pmod{20}$, onda je $a + b \equiv c + d \pmod{20}$.
(ii) U suprotnom, najviše tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju s 20, dok su svi ostali ostaci međusobno različiti. Tada u promatranom deveteročlanom podskupu postoji barem sedam brojeva koji daju različite ostatke pri dijeljenju s 20. Od tih sedam brojeva možemo načiniti $\binom{7}{2} = 21$ parova brojeva. Po Dirichletovom principu zaključujemo da sume elemenata neka dva para daju isti ostatak pri dijeljenju s 20, tj. postoje a, b, c, d takvi da je $a + b \equiv c + d \pmod{20}$. Pritom su ta dva para disjunktna, jer se inače javlja slučaj (i).

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Supetar, 5. - 8. svibnja 1999. godine

IV. razred

1. Polovištem svakog brida tetraedra položena je ravnina okomito na suprotni brid. Dokažite da se svih šest ravnina siječe u točki koja je simetrična središtu opisane sfere tetraedra u odnosu na njegovo težište.

2. Neka je n pozitivan cijeli broj veći od 1. Koliko ima permutacija $(a_1, a_2, ..., a_n)$ brojeva $1, 2, ..., n$ takvih da postoji točno jedan indeks $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ za koji je $a_i > a_{i+1}$?

3. Izračunajte sumu

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots + \frac{a_k}{2^k} + \ldots$$

gdje je (a_n) niz brojeva definiran na ovaj način:

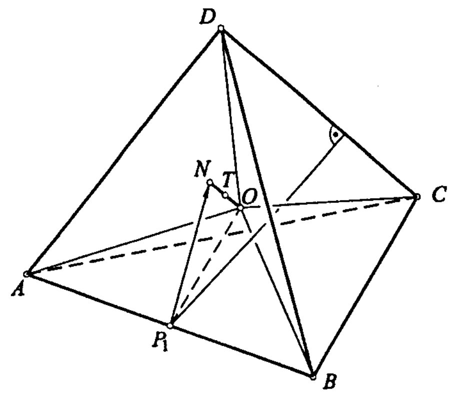
$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{za } n > 2.$$

4. U ravnini je dan kvadrat s vrhovima $T_1 = (1,0)$, $T_2 = (0,1)$, $T_3 = (-1,0)$ i $T_4 = (0,-1)$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ neka je T_{n+4} polovište dužine $\overline{T_n T_{n+1}}$. Uz pretpostavku da niz točaka T_n $(n \to \infty)$ ima graničnu točku, nađite koordinate te točke.

Rješenja za IV. razred
Svaki zadatak vrijedi po 25 bodova.

1. Neka je O središte opisane sfere danom tetraedru i T njegovo težište. Tada je

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$



Neka je N točka za koju je

$$\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$

Neka su P_i, $i = 1,2,3,4,5,6$ – polovišta bridova $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, tim redom, te π_{P_i} – odgovarajuće ravnine kroz ova polovišta, okomite na suprotne bridove. Tada je

$$\overrightarrow{P_1N} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{ON} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right),$$

pa je

$$\overrightarrow{P_1N} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(|OD|^2 - |OC|^2\right) = 0,$$

$$\Longrightarrow \quad N \in \pi_{P_1}.$$

Analogno se pokazuje da je $N \in \pi_{P_i}$ za $i = 2,3,4,5,6$, tj. da svih šest ravnina sadrži točku N.

2. Označimo s p_n broj traženih permutacija. Očito je $p_1 = 0$ i $p_2 = 1$. Neka je $n \geq 2$. Za $a_n = n$ broj traženih permutacija je p_{n-1}.

Promatrajmo sada sve tražene permutacije $(a_1, a_2, ..., a_n)$ za koje je $a_i = n$, gdje je $1 \leq i \leq n-1$ fiksan. Svih mogućih permutacija od preostalih $n-1$ brojeva ima $(n-1)!$. Prvih $i-1$ i zadnjih $n-i$ brojeva u permutaciji moraju biti u rastućem poretku. Stoga je dovoljno od $n-1$ brojeva odabrati $i-1$ koji se nalaze ispred i-tog mjesta, i time je cijela permutacija određena. Zato je za $a_i = n$ broj permutacija $\binom{n-1}{i-1}$, odakle je

$$p_n = p_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} = p_{n-1} + 2^{n-1} - 1.$$

Odavde dobivamo

$$p_n = (2^{n-1} - 1) + (2^{n-2} - 1) + \ldots + (2 - 1) = 2^n - n - 1.$$

3. U brojniku se pojavljuju članovi Fibonaccijevog niza a_n: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$. Izračunajmo n-tu parcijalnu sumu tog reda.

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_1 + a_2}{2^3} + \ldots + \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2^n} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k} - \frac{1}{4} - \frac{a_{n-1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^{n+2}} - \frac{a_n}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k} - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^{n+2}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}S_n - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^{n+2}}
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$S_n = 2 - \frac{a_{n+1}}{2^{n-1}} - \frac{a_n}{2^n} \quad \text{tj.} \quad |S_n - 2| = \frac{a_{n+1}}{2^{n-1}} + \frac{a_n}{2^n}.$$

Dovoljno je pokazati da posljednji izraz može biti po volji mali pozitivan broj. To znači da je $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$.

Pokažimo matematičkom indukcijom da je

$$a_n \leq 3^{\frac{n}{2}}. \tag{1}$$

Za $n = 1$ i $n = 2$ tvrdnja vrijedi.
Pretpostavimo da za neki $n \geq 2$ vrijedi $a_n \leq 3^{\frac{n}{2}}$ i $a_{n-1} \leq 3^{\frac{n-1}{2}}$. Tada je

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \leq 3^{\frac{n}{2}} + 3^{\frac{n-1}{2}} \leq 3^{\frac{n+1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} + 1 \leq 3.$$

Kako vrijedi ova nejednakost, vrijedi i (1).
Sada je

$$\begin{aligned}
|S_n - 2| &= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot a_{n+1} + \frac{1}{2^n} \cdot a_n \\
&\leq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot 3^{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{2^n} \cdot 3^{\frac{n}{2}} \\
&= 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \to 0, \quad \text{kada } n \to \infty.
\end{aligned}$$

4. Kako je $x_{n+4} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$, slijedi

$$\frac{1}{2}x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + x_{n+4} = \frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3},$$

pa je zbroj $\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}$ konstantan. Također je i $\frac{1}{2}y_n + y_{n+1} + y_{n+2} + y_{n+3}$ konstantan. Vrijedi

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{2} + 0 - 1 + 0 = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 + 1 + 0 - 1 = 0.$$

Ako je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ i $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, tada imamo jednadžbe

$$\frac{7}{2}x = -\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{2}y = 0,$$

$x = -\frac{1}{7}, \quad y = 0$. Granična točka je $T\left(-\frac{1}{7}, 0\right)$.