MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. travnja 1999.

I. razred

1. Dijagonale tetivnog četverokuta su međusobno okomite i dijele ga na četiri trokuta. Dokažite da visina svakog od tih trokuta i težišnica njemu nasuprotnog trokuta, povučene iz sjecišta dijagonala, leže na istom pravcu.

2. Dokažite da je svaki broj oblika $m^4 + 4k^4$ složen, ako su m i k pozitivni cijeli brojevi i $k \geq 2$.

3. Neka su a, b, c, d, e i f međusobno različiti cijeli brojevi. Dokažite da je

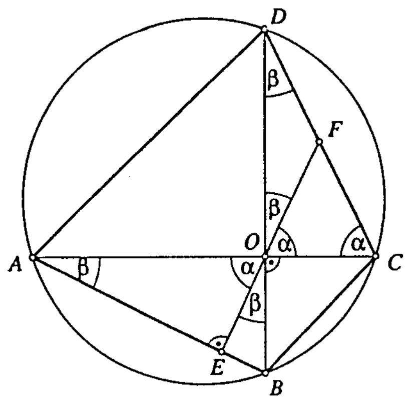
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-f)^2 + (f-a)^2 \geq 18.$$

4. Kolika je površina skupa točaka čije koordinate u Kartezijevom koordinatnom sustavu zadovoljavaju nejednakost

$$|x| + |y| + |x+y| \leq 2?$$

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Sjecište međusobno okomitih dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ četverokuta $ABCD$ označimo s O. Promatrajmo dva nasuprotna trokuta OAB i OCD. Neka je $\overline{OE}$ visina prvog od njih, pri čemu pravac OE siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki F. Dovoljno je pokazati da je F polovište stranice $\overline{CD}$. 5 bodova



Označimo li $\alpha = \sphericalangle EOA$ i $\beta = \sphericalangle BOE$, tada je $\alpha + \beta = 90°$ i $\sphericalangle OAB = \beta$. Nadalje, $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAB = \beta$, pa je $\sphericalangle OCD = \alpha$. 10 bodova

Kako je $\sphericalangle FOC = \sphericalangle EOA = \alpha$ i $\sphericalangle DOF = \sphericalangle BOE = \beta$, trokuti FOC i FOD su jednakokračni. Zato je $|FC| = |FO|$ i $|FO| = |FD|$, a odavde $|FC| = |FD|$. Time je tvrdnja zadatka dokazana. 10 bodova

2.

$$
\begin{aligned}
m^4 + 4k^4 &= m^4 + 4m^2k^2 + 4k^4 - 4m^2k^2 \\
&= (m^2 + 2k^2)^2 - (2mk)^2 \\
&= (m^2 + 2k^2 - 2mk)(m^2 + 2k^2 + 2mk) \\
&= [(m-k)^2 + k^2] \cdot [(m+k)^2 + k^2].
\end{aligned}
$$

Budući da je svaki od ova dva faktora (zbog $k \geq 2$) veći od 1, broj $m^4 + 4k^4$ je složen.

25 bodova

3. Ako je jedna od razlika veća ili jednaka 4, onda je izraz na lijevoj strani sigurno veći ili jednak $16 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 21$. 5 bodova

Ako nema razlika većih ili jednakih 4, a dvije razlike su jednake 3, onda je izraz na lijevoj strani, također veći od 18. 5 bodova

Ako je najveća razlika jednaka 3 i točno je jedna takva, onda se vidi da barem dvije razlike moraju biti jednake 2 (dokaz kontradikcijom). No, tada je izraz na lijevoj strani sigurno veći ili jednak $9 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1$, što je veće od 18.

5 bodova

Ako su sve razlike manje od 3, brojevi mogu biti (bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je a najmanji broj):

$$a = x,\quad b = x+1,\quad c = x+3,\quad d = x+5,\quad e = x+4,\quad f = x+2 \quad \text{ili}$$
$$a = x,\quad b = x+2,\quad c = x+4,\quad d = x+5,\quad e = x+3,\quad f = x+1.$$

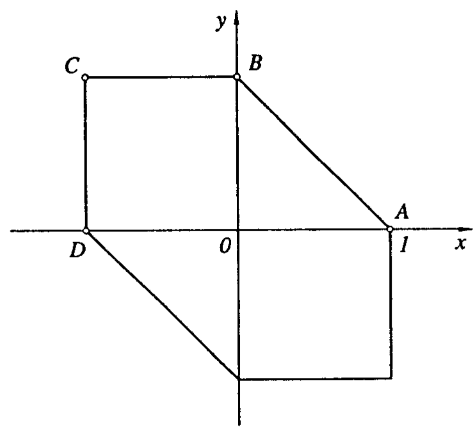
U oba slučaja izraz na lijevoj strani je jednak 18. 10 bodova

Napomena 1. Slučaj kada je točno jedna najveća razlika jednaka 3 može se riješiti i navođenjem svih slučajeva (ima ih 10). U prvih pet razlike su $3,2,-1,-2,-1,-1$; $2,3,-1,-1,-2,-1$; $1,3,1,-2,-1,-2$; $3,2,1,-2,-2,-2$; $1,2,3,-2,-2,-2$, a razlike drugih pet slučajeva dobivaju se promjenom predznaka.

Napomena 2. Dati 10 bodova ako učenik na bilo koji drugi način dođe do zaključka da brojevi moraju biti iz skupa $\{x, x+1, ..., x+6\}$ za neki cijeli broj x (čak i ako nedostaje konačni zaključak).

4. Za $u \geq 0$ je $|u| = u$, a za $u \leq 0$ je $|u| = -u$, tj. $|u| = |-u|$. Zato je područje P određeno sa $|x| + |y| + |x+y| \leq 2$ centralno simetrično u odnosno na ishodište, tj. ako je $(x, y) \in P$, onda je $(-x, -y) \in P$. Zato je dovoljno ispitati slučajeve u prvom i drugom kvadrantu, tj. za $y \geq 0$. 5 bodova

U prvom kvadrantu je $x \geq 0$ i $y \geq 0$ i stoga je $x+y \geq 0$, pa nejednadžba poprima oblik $x + y \leq 1$. Zadovoljavaju sve točke trokuta OAB (vidi sliku). 5 bodova



U drugom kvadrantu je $x \leq 0$ i $y \geq 0$. Moramo promatrati dva slučaja:

(i) $x + y \geq 0$, (područje iznad pravca OC),

(ii) $x + y \leq 0$, (područje ispod pravca OC).

U prvom slučaju je $-x + y + x + y \leq 2$, tj. $y \leq 1$. Dakle, mora biti $-1 \leq x \leq 0$, $0 \leq y \leq 1$ i $x + y \geq 0$. Zadovoljavaju sve točke trokuta BOC.

U drugom slučaju je $-x + y - x - y \leq 2$ tj. $-1 \leq x \leq 0$, $0 \leq y \leq 1$ i $x + y \leq 0$. Zadovoljavaju sve točke trokuta DOC. Dakle, za $x \leq 0$, $y \geq 0$ zadovoljavaju točke kvadrata $OBCD$.

10 bodova

Za $y \leq 0$ dobije se centralnom simetrijom dobivenog lika za $y \geq 0$ u odnosu na ishodište, kako je prikazano na slici. Površina dobivenog lika je 3. 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. travnja 1999.

II. razred

1. U ravnini su dane tri međusobno različite nekolinearne točke A, M i N. Konstruirajte kvadrat tako da mu je jedan vrh u točki A, a dvije stranice koje ga ne sadrže, leže na pravcima koji prolaze točkama M, odnosno N.

2. Nađite skup kompleksnih brojeva z za koje je

$$\operatorname{Im}(z^4) = \left(\operatorname{Re}(z^2)\right)^2$$

i skicirajte ga u kompleksnoj ravnini.

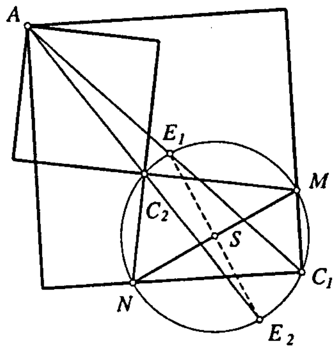
3. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$10x^3 + 20y^3 + 8xyz = 1999z^3.$$

4. (a) Odredite sve četveroznamenkaste brojeve koji su jednaki četvrtoj potenciji sume svojih znamenaka.
   (b) Dokažite da ne postoji peteroznamenkasti broj koji je jednak petoj potenciji sume svojih znamenaka.

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Neka je S polovište dužine $\overline{MN}$ i $k(S,r)$ kružnica nad promjerom $\overline{MN}$. Vrh C leži na toj kružnici i pritom je $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ACN = 45°$, pa je sjecište dijagonale AC i kružnice (različit od točke C) točka koja raspolavlja luk $\widehat{MN}$. 10 bodova



Najprije odredimo točke E_1 i E_2 koje raspolavljaju luk $\widehat{MN}$ (to su točke na presjeku kružnice i okomice na MN kroz S). Točke C_1 i C_2 dobijemo kao presjek kružnice i pravaca AE_1 i AE_2 (različit od E_i). Sada je lako dovršiti konstrukciju. Dobijamo dva rješenja. 10 bodova

Ova konstrukcija je moguća za $A \notin k$ i ako AE_i $(i = 1, 2)$ nije tangenta.

Ako je AE_i tangenta, onda je $C_i = E_i$ i dalje se lako konstruira kvadrat.

Ako je $A \in k$, zadatak nema rješenja osim ako je $\triangle AMN$ jednakokračan pravokutni s vrhom pravog kuta u A. U tom je slučaju kvadrat upisan u tu kružnicu.

5 bodova

2. Neka je $z = x + iy$. Tada je $z^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$,
$z^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i \cdot (4x^3y - 4xy^3)$. 5 bodova

Tada iz uvjeta $\mathrm{Im}\,(z^4) = \left(\mathrm{Re}\,(z^2)\right)^2$ slijedi

$$4x^3y - 4xy^3 = (x^2 - y^2)^2,$$

$$4xy(x^2 - y^2) - (x^2 - y^2)^2 = 0,$$

$$(x^2 - y^2)(4xy - x^2 + y^2) = 0.$$

5 bodova

Sada moramo promatrati dva slučaja: $1°\ \ y^2 = x^2$, i $2°\ \ y^2 + 4xy - x^2 = 0$.

2 boda

U prvom slučaju je $y = \pm x$, i zadovoljavaju sve točke pravaca $y = \pm x$. 3 boda

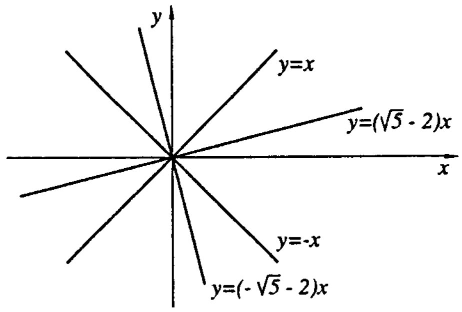
U drugom slučaju, podijelivši jednadžbu sa x^2, dobivamo kvadratnu jednadžbu po $\frac{y}{x}$,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{x}\right) - 1 = 0,$$

čija rješenja su

$$\frac{y}{x} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Time smo dobili još dva pravca $y = (-2 \pm \sqrt{5})x$. 8 bodova



Traženi skup točaka su četiri pravca skicirana na slici. 2 boda

3. Jedno očito rješenje je $x = y = z = 0$. Pokazat ćemo da je to i jedino rješenje. 2 boda

Ako postoji rješenje x, y, z pri čemu nisu sva tri jednaka 0, takvo da je njihova najveća zajednička mjera $k > 1$, tada je zbog homogenosti jednadžbe također i, $x_1 = \frac{x}{k}$, $y_1 = \frac{y}{k}$ i $z_1 = \frac{z}{k}$ cjelobrojno rješenje i najveća zajednička mjera od x_1, y_1 i z_1 jednaka je 1. Stoga možemo pretpostaviti da su x, y i z relativno prosti. (Dovoljno je naći takva rješenja.) 5 bodova

Kako su na lijevoj strani jednadžbe parni brojevi, a na desnoj je 1999 neparan broj, mora z biti paran, tj. $z = 2z_1$. Uvrštavanjem u jednadžbu i dijeljenjem obiju strana s 2 dobivamo

$$5x^3 + 10y^3 + 8xyz_1 = 7996z_1^3;$$

Odavde slijedi da je x paran broj, tj. $x = 2x_1$. Ponovnim uvrštavanjem u jednadžbu i dijeljenjem s 2 dobivamo

$$20x_1^3 + 5y^3 + 8x_1yz_1 = 3998z_1^3.$$

Odavde vidimo da y mora biti paran broj, tj. $y = 2y_1$. 8 bodova

No to znači da su sve tri nepoznanice djeljive s 2, pa je njihova najveća zajednička mjera barem 2, što je u suprotnosti s pretpostavkom. 10 bodova

4. (a) Neka je $\overline{abcd}$ četveroznamenkasti broj takav da je

$$\overline{abcd} = (a+b+c+d)^4.$$ 5 bodova

Odavde slijedi da je $a+b+c+d \in \{6,7,8,9\}$. 5 bodova
Dovoljno je provjeriti svaku od ove četiri mogućnosti:

$$6^4 = 1296, \quad 7^4 = 2401, \quad 8^4 = 4096, \quad 9^4 = 6561.$$

Vidimo da je jedino rješenje broj $2401 = (2+4+0+1)^4$. 5 bodova

Napomena. Samo rješenje $2401 = 7^4$, bez obrazloženja da drugih rješenja nema vrijedi 5 bodova.

(b) Neka je sada $\overline{abcde}$ peteroznamenkasti broj takav da je

$$\overline{abcde} = (a+b+c+d+e)^5.$$

Odavde je $a+b+c+d+e \in \{7,8,9\}$. Brojevi 7^5, 8^5 i 9^5 završavaju znamenkama 7, 8 i 9, tim redom. Tada bi moralo biti $a+b+c+d=0$, što nije moguće. Zato u ovom slučaju ne postoji traženi broj. 10 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. travnja 1999.

III. razred

1. Riješite nejednadžbu

$$\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\geq 0.$$

2. Oko danog pravokutnika, stranica duljina a i b, želimo opisati pravokutnik površine m^2. Za koje vrijednosti m zadatak ima rješenje?

3. Baza piramide je konveksni mnogokut, a površine svih bočnih strana su jednake. Dokažite da je suma udaljenosti bilo koje točke baze, od ravnina bočnih strana piramide konstantna, tj. ne ovisi o izboru te točke.

4. Riješite jednadžbu

$$\mathrm{tg}x+6\,\mathrm{ctg}x=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}-4\sqrt{3}.$$

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Prije svega, mora biti $x^2-4x-11>0$ i $-3x^2-5x+2\neq 0$, što je ekvivalentno sa $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2-\sqrt{15})\cup(2+\sqrt{15},+\infty)$. 5 bodova
Za sve dozvoljene vrijednosti od x polazna nejednadžba je ekvivalentna sa

$$\left(2-\frac{3}{\log_5 11}\right)\frac{\log_5(x^2-4x-11)}{2-5x-3x^2}\geq 0.$$ 5 bodova

Budući da je $2-\frac{3}{\log_5 11}<0$ (zbog $11^2<5^3$), dobivamo

$$\frac{\log_5(x^2-4x-11)}{3x^2+5x-2}\geq 0.$$

Sada imamo

$$\begin{cases} x^2-4x-11\geq 1\\ 3x^2+5x-2>0\end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} 0\leq x^2-4x-11\leq 1\\ 3x^2+5x-2<0\end{cases}.$$

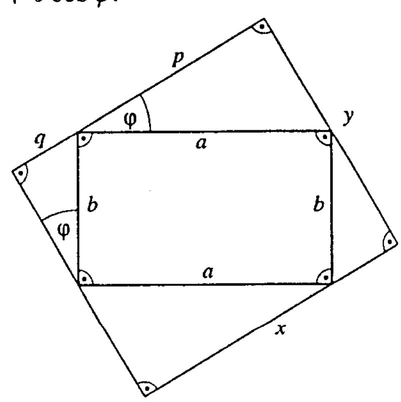
5 bodova

Rješenje prvog sustava je $x\in(-\infty,-2)\cup[6,+\infty)$, a drugog $x\in(-2,\frac{1}{3})$.
5 bodova

Usporedimo li ovo s početnim uvjetima, dobivamo

$$x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2-\sqrt{15})\cup[6,+\infty).$$ 5 bodova

2. Označimo li duljine stranica opisanog pravokutnika sa x i y, tada uz ostale oznake kao na slici, imamo $p=a\cos\varphi$, $q=b\sin\varphi$, $x=p+q=a\cos\varphi+b\sin\varphi$. Isto tako se dobije $y=a\sin\varphi+b\cos\varphi$. 5 bodova



Za površinu opisanog pravokutnika vrijedi:

$$\begin{aligned} m^2 &= xy = (a\cos\varphi + b\sin\varphi)(a\sin\varphi + b\cos\varphi) \\ &= a^2\cos\varphi\sin\varphi + ab\cos^2\varphi + ab\sin^2\varphi + b^2\sin\varphi\cos\varphi \\ &= (a^2+b^2)\sin\varphi\cos\varphi + ab(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \\ &= \frac{1}{2}(a^2+b^2)\sin 2\varphi + ab. \end{aligned}$$

5 bodova

Rješenje postoji za $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, odnosno za $0 < \sin 2\varphi \le 1$. 5 bodova

Zato je

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2)\cdot 0 + ab < m^2 \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)\cdot 1 + ab$$

tj.

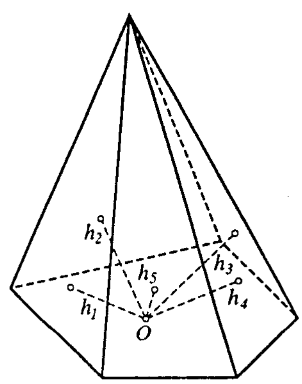
$$ab < m^2 \le \frac{(a+b)^2}{2}.$$ 5 bodova

Odavde slijedi da rješenje postoji ako i samo ako je

$$\sqrt{ab} < m \le \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$ 5 bodova

Napomena. Za $\varphi = 0$ dobije se polazni pravokutnik, i $m^2 = ab$.

3. Neka je P_0 površina baze piramide, duljina njezine visine h, površine bočnih strana P (sve su jednake), a udaljenosti promatrane točke S baze od ravnina u kojima leže te strane, h_i, $i = 1, 2, ..., n$, redom. Tada volumen piramide, zbog konveksnosti njezine baze, možemo izraziti na dva načina:



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}P_0 h \\ V &= \frac{1}{3}Ph_1 + \frac{1}{3}Ph_2 + ... + \frac{1}{3}Ph_n \end{aligned}$$

15 bodova

Slijedi

$$h_1 + h_2 + .. + h_n = \frac{P_0 h}{P},$$

što ne ovisi o izboru točke S. 10 bodova

4. Primijetimo najprije da je $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}^2 x$.
Dana jednadžba je ekvivalentna sa

$$\mathrm{tg}x + 6\,\mathrm{ctg}x = |\mathrm{tg}x| - 4\sqrt{3}.$$ 5 bodova

Ako je $\mathrm{tg}x > 0$, tada je $\mathrm{ctg}x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} < 0$, pa je i $\mathrm{tg}x < 0$, što je kontradikcija.
5 bodova

Dakle mora biti $\mathrm{tg}x < 0$, odakle je $2\mathrm{tg}x + 6\mathrm{ctg}x + 4\sqrt{3} = 0$. Množenjem s $\mathrm{tg}x/2$, dobivamo

$$\mathrm{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\mathrm{tg}x + 3 = 0 \Longleftrightarrow (\mathrm{tg}x + \sqrt{3})^2 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{tg}x = -\sqrt{3}.$$ 10 bodova

Rješenje je $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ ili $x = 120° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbf{Z}$. 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. travnja 1999.

IV. razred

1. Neka su A i B točke na paraboli s tjemenom u točki O takve da su tetive $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ okomite, a ϕ kut između tetive $\overline{OA}$ i osi parabole. Dokažite da je

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \operatorname{ctg}^3\phi.$$

2. Dokažite da za svaki pozitivan cijeli broj n vrijedi jednakost

$$3a_1 + 5a_2 + 7a_3 + \ldots + (2n+1)a_n = (n+1)^2 a_n - \frac{1}{2}n(n+1),$$

ako je $a_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$, za svaki prirodni broj k.

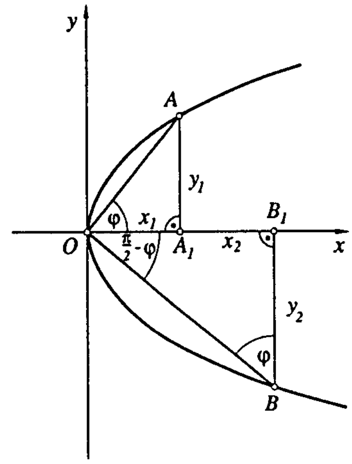
3. Šest četvrtih razreda, IVa, IVb, IVc, IVd, IVe i IVf trebaju ići na maturalno putovanje, a moguća odredišta su Kopački rit, Plitvička jezera, Trakošćan i Kornati. Na koliko načina oni to mogu učiniti, ako svaki razred može otići na samo jedno od tih mjesta, a svako od njih mora posjetiti barem jedan razred?

4. Neka su a_1, a_2, ..., a_n članovi aritmetičkog i b_1, b_2, ..., b_n članovi geometrijski niza s pozitivnim članovima. Ako je $a_1 = b_1$ i $a_n = b_n$, dokažite da je suma članova aritmetičkog niza veća ili jednaka od sume članova geometrijskog niza.

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.* Za parabolu $y^2 = 2px$ njezina os se podudara s osi apscisa. Označimo li $k = \mathrm{tg}\phi$, tada je $y = kx$ jednadžba pravca OA, a $y = -\frac{1}{k}x$, $k \neq 0$, je jednadžba pravca OB. Nađimo točke A i B, sjecišta tih pravaca i parabole. Kako je $k^2x^2 = 2px$, zbog $x \neq 0$, $x = \frac{2p}{k^2}$, dobivamo $A\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right)$. Analogno je $B(2pk^2, -2pk)$.

10 bodova



Sada je

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{2p}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{2p}{k}\right)^2}}{\sqrt{(2pk^2)^2 + (2pk)^2}} = \frac{\frac{2p}{k^2}\sqrt{1+k^2}}{2pk\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{k^3} = \frac{1}{\mathrm{tg}^3\phi} = \mathrm{ctg}^3\phi.$$

15 bodova

Drugo rješenje. Iz pravokutnih trokuta OA_1A i OB_1B imamo:

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1^2}{x_1y_1} = \frac{2px_1}{x_1y_1} = \frac{2p}{y_1},$$

odnosno

$$y_1 = \frac{2p}{\mathrm{tg}\phi},$$

te

$$\mathrm{tg}\phi = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{x_2}{-y_2} = -\frac{x_2y_2}{y_2^2} = -\frac{x_2y_2}{2px_2} = -\frac{y_2}{2p},$$

odnosno

$$-y_2 = 2p\mathrm{tg}\phi.$$

10 bodova

Sada imamo

$$\begin{aligned}\frac{|OA|}{|OB|} &= \frac{\frac{y_1}{\sin\phi}}{\frac{-y_2}{\cos\phi}} = \frac{y_1}{-y_2\mathrm{tg}\phi}\\ &= \frac{\frac{2p}{\mathrm{tg}\phi}}{2p\mathrm{tg}^2\phi} = \frac{1}{\mathrm{tg}^3\phi} = \mathrm{ctg}^3\phi.\end{aligned}$$

15 bodova

2. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ i lijeva i desna strana su jednake 3.

Pretpostavimo da je

$$3a_1 + 5a_2 + \ldots + (2k+1)a_k = (k+1)^2 a_k - \frac{1}{2}k(k+1)$$

za neki $k \in \mathbf{N}$. 5 bodova

Tada je

$$\begin{aligned}&3a_1 + 5a_2 + \ldots + (2k+1)a_k + (2k+3)a_{k+1}\\ &= (k+1)^2 a_k - \frac{1}{2}k(k+1) + (2k+3)a_{k+1},\end{aligned}$$

a odavde korištenjem

$$a_k = a_{k+1} - \frac{1}{k+1},$$

dobivamo

$$\begin{aligned}&3a_1 + 5a_2 + \ldots + (2k+1)a_k + (2k+3)a_{k+1}\\ &= (k^2+4k+4)a_{k+1} - (k+1) - \frac{1}{2}k(k+1)\\ &= (k+2)^2 a_{k+1} - \frac{1}{2}(k+1)(k+2),\end{aligned}$$

čime smo proveli korak indukcije i dokazali tvrdnju. 20 bodova

3. *Prvo rješenje.* Za traženi raspored postoje ove dvije mogućnosti:

a) na jedno odredište će otputovati tri razreda, a na preostala tri odredišta po jedan razred;

b) na dva odredišta će otputovati po dva razreda, te na preostala dva po jedan razred. 5 bodova

Za a) imamo najprije 4 mogućnosti izbora odredišta na koji će otići tri razreda, a za svaki od tih izbora postoji $\frac{6!}{3!}$ rasporeda po razredima. 7 bodova

Za b) imamo najprije 6 mogućnosti izbora odredišta na koji će otići dva razreda (odnosno, jedan razred), a za svaki od tih izbora postoji $\frac{6!}{2!\cdot 2!}$ rasporeda po razredima. 7 bodova

Ukupno imamo

$$4 \cdot \frac{6!}{3!} + 6 \cdot \frac{6!}{2!\cdot 2!} = 480 + 1080 = 1560$$

mogućnosti. 6 bodova

Drugo rješenje. Šest razreda može putovati na četiri odredišta (svaki na jedno, ali ukupno, ne nužno na sva) na 4^6 načina, na tri odredišta na 3^6 načina, na dva odredišta na 2^6 načina, a na jedno odredište na 1 način. 10 bodova
Sada, prema formuli uključivanja i isključivanja imamo da je broj traženih mogućnosti jednak

$$4^6 - 4 \cdot 3^6 + 6 \cdot 2^6 - 4 = 1560.$$

15 bodova

Napomena. Pogrešno brojanje kod kojeg učenik najprije rasporedi u svako odredište po jedan razred, a potom dva preostala razreda raspoređuje proizvoljno i koje rezultira sa $\binom{6}{4} \cdot 4! \cdot 4^2 = 5760$ mogućnosti (neke su brojane više puta), ocijeniti s 5 bodova.

4. *Prvo rješenje.* Označimo sa S_a sumu aritmetičkog, sa S_g sumu geometrijskog niza a s q kvocijent geometrijskog niza. Tada je

$$S_g = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

i

$$S_a = \frac{a_1 + a_n}{2} n = a_1 \frac{1 + q^{n-1}}{2} \cdot n.$$

5 bodova

Zato imamo

$$\begin{aligned}
S_g - S_a &= a_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} - \frac{1 + q^{n-1}}{2} n \right) \\
&= a_1 \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} - \frac{1 + q^{n-1}}{2} n \right) \\
&= \frac{a_1}{2}(1 + q^{n-1} + \ldots + q^k + q^{n-k-1} + \ldots + q^{n-1} + 1) - \frac{a_1}{2}(1 + q^{n-1})n \\
&= \frac{a_1}{2} \left(((1 + q^{n-1}) - (1 + q^{n-1})) + \ldots + ((q^k + q^{n-k-1}) - (1 + q^{n-1})) \right. \\
&\quad \left. + \ldots + ((q^{n-1} + 1) - (1 + q^{n-1})) \right).
\end{aligned}$$

10 bodova

Kako je $q^k + q^{n-k-1} - (1 + q^{n-1}) = (q^k - 1)(1 - q^{n-k-1}) \le 0$, za svaki $k = 0, \ldots, n-1$, to je $S_g - S_a \le 0$, čime je tvrdnja dokazana. 10 bodova

Drugo rješenje. Razlika aritmetičkog niza je $d = \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}$, a kvocijent geometrijskog niza je $q = \sqrt[n-1]{\dfrac{b_n}{b_1}} = \sqrt[n-1]{\dfrac{a_n}{a_1}}$.

Stoga je opći član aritmetičkog niza

$$\begin{aligned} a_k = a_1 + (k-1)d &= a_1 + \frac{k-1}{n-1}(a_n - a_1) \\ &= \frac{n-k}{n-1}a_1 + \frac{k-1}{n-1}a_n, \end{aligned}$$

a opći član geometrijskog niza

$$b_k = a_1 q^{k-1} = a_1 \cdot \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{k-1}{n-1}} = a_1^{\frac{n-k}{n-1}} \cdot a_n^{\frac{k-1}{n-1}}.$$

10 bodova

Dovoljno je pokazati da je $a_k \geq b_k$, za $1 \leq k \leq n$, jer je tada očito i suma niza a_k veća ili jednaka sumi niza b_k. 5 bodova

Zaista,

$$\begin{aligned} a_k \geq b_k \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n-k}{n-1}a_1 + \frac{k-1}{n-1}a_n \geq a_1^{\frac{n-k}{n-1}} a_n^{\frac{k-1}{n-1}} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(n-k)a_1 + (k-1)a_n}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1^{n-k}a_n^{k-1}} \end{aligned}$$

a to je aritmetičko–geometrijska nejednakost za $n-1$ brojeva $\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{n-k}, \underbrace{a_n, a_n, \ldots, a_n}_{k-1}$.

10 bodova