REPUBLIKA HRVATSKA
MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

9. državno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

Mali Lošinj, 10.–13. svibnja 2000. godine

7. razred

1. Jednog je dana 40% učenika prijepodnevne smjene neke škole za užinu popilo kakao, 36% učenika sok, a ostali su se odlučili za čaj. U poslijepodnevnoj smjeni te škole čaj je za užinu popilo 37.5% učenika više nego u prijepodnevnoj smjeni, sok 75% učenika više, a kakao je izabralo 75% učenika manje nego prijepodne. Je li broj učenika u poslijepodnevnoj smjeni veći ili manji u odnosu na prijepodnevnu smjenu? Za koliko postotaka?

2. Odredi sve vrijednosti parametra m tako da pravac $3x + my = 12$ određuje s koordinatnim osima trokut površine 6.

3. Koliko ima prirodnih brojeva n manjih od 2000 takvih da su zbroj znamenaka od n i zbroj znamenaka od $n + 1$ neparni brojevi?

4. Zadan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom u vrhu C. Neka je točka D nožište visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$, točka R središte kružnice upisane trokutu ADC i točka S središte kružnice upisane trokutu BDC. Ako pravac CR siječe hipotenuzu $\overline{AB}$ u točki M, a pravac CS u točki N, onda je $|AC| = |AN|$ i $|BC| = |BM|$. Dokaži!

5. Zadan je jednakokračan trapez $ABCD$ kojemu su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ osnovice, pri čemu je $|AB| = |BC| = 2|CD|$. Ako je točka N nožište okomice iz vrha A na krak $\overline{BC}$, onda je $|BN| : |NC| = 1 : 3$. Dokaži!

REPUBLIKA HRVATSKA
MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

9. državno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

Mali Lošinj, 10.–13. svibnja 2000. godine

8. razred

1. Odredi sve vrijednosti parametra a za koje će zbroj razlomaka $\frac{a+1}{a+4}$ i $\frac{5}{a-7}$ biti jednak njihovom umnošku.

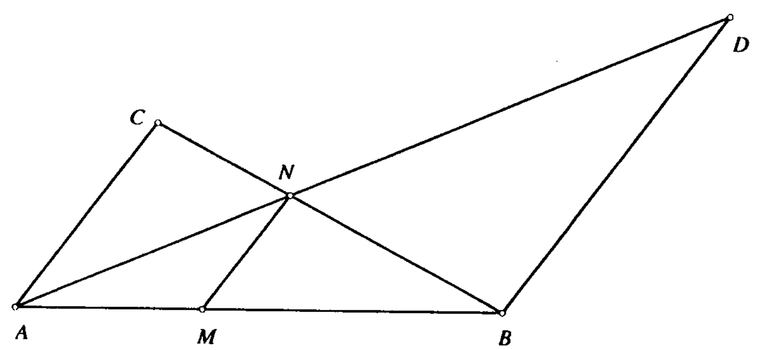
2. Dokaži da je zbroj $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{1999} + 2^{2000}$ djeljiv s 30.

3. Na kružnici su u smjeru kretanja kazaljke na satu redom napisani svi prirodni brojevi od 1 do 2000. Precrtamo najprije broj 1, zatim 16, pa 31, i tako redom svaki petnaesti broj u istom smjeru.
Koji će broj prvi biti precrtan dva puta? Koliko je brojeva u tom trenutku još uvijek ostalo neprecrtano?

4. Na pravcu p istaknute su točke C i D, tako da je $|CD| = 114$. S iste strane pravca p odabrane su točke A i B sa svojstvom da je $AC \perp p$ i $BD \perp p$, pri čemu je $|AC| = 13$ i $|BD| = 65$. Na dužini $\overline{CD}$ odabrana je točka P, tako da je zbroj $|AP| + |PB|$ najmanji moguć. Kolike su duljine dužina $\overline{CP}$ i $\overline{PD}$?

5. U ravnini su istaknute točke A, B, C, D, M i N kao na slici, pri čemu je $AC \parallel MN \parallel BD$. Dokaži da je

$$\frac{1}{|MN|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|BD|} .$$



RJEŠENJA ZADATAKA ZA 7. RAZRED

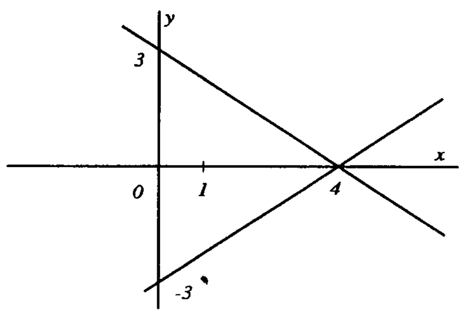
1. Označimo s x ukupni broj učenika prijepodnevne smjene. Za užinu je tada $0.4x$ učenika popilo kakao, $0.36x$ učenika popilo je sok, a ostali, tj. njih $x - 0.4x - 0.36x = 0.24x$ čaj. U poslijepodnevnoj smjeni čaj je popilo $0.24x + 0.375 \cdot 0.24x = 0.33x$ učenika, sok $0.36x + 0.75 \cdot 0.36x = 0.63x$ učenika, a kakao njih $0.4x - 0.75 \cdot 0.4x = 0.1x$. Ukupni broj učenika poslijepodnevne smjene stoga je $0.33x + 0.63x + 0.1x = 1.06x = x + 0.06x$. Zbog $0.06 = 6\%$ zaključujemo da u poslijepodnevnoj smjeni ove škole ima 6% više učenika nego u prijepodnevnoj.
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Pravac zadan jednadžbom $3x + my = 12$ siječe x-os u točki čija je ordinata $y = 0$. Tada je $3x = 12$, tj. $x = 4$, te je presjek pravca i x-osi točka $A(4,0)$, koja ne ovisi o izboru parametra m. Ako je $m = 0$, onda je jednadžba danog pravca $3x = 12$, tj. $x = 4$, pa je on usporedan s y-osi. U tom slučaju on ne siječe y-os te s koordinatnim osima ne određuje trokut.
Prema tome, nužno je $m \neq 0$. Sjecište pravca $3x + my = 12$ i y-osi tada je točka s apscisom $x = 0$. Za njenu ordinatu y vrijedi $my = 12$, tj. $y = \frac{12}{m}$, pa je to točka $B\left(0, \frac{12}{m}\right)$. Trokut kojeg zadani pravac zatvara s koordinatnim osima tada je $\triangle OAB$, gdje je $O(0,0)$ ishodište koordinatnog sustava. Taj trokut je pravokutan, s pravim kutom u vrhu O (koordinatne osi sijeku se u točki O pod pravim kutom), pa je njegova površina jednaka $P_{OAB} = \frac{|OA| \cdot |OB|}{2}$. Odmah je $|OA| = 4$, dok $|OB|$ ovisi o tome nalazi li se točka B na pozitivnom ili negativnom dijelu osi Oy, što opet ovisi o predznaku parametra m, koji može biti ili pozitivan ili negativan. Zato imamo dvije mogućnosti:

   (a) $m > 0$, što povlači da je $\frac{12}{m} > 0$ te se točka B nalazi na pozitivnom dijelu osi Oy. Tada je $|OB| = \frac{12}{m}$ i $P_{OAB} = \frac{4 \cdot \frac{12}{m}}{2}$ pa iz uvjeta $P_{OAB} = 6$ slijedi $6 = \frac{24}{m}$, tj. $m = 4$.

   (b) $m < 0$, što povlači da je $\frac{12}{m} < 0$ te se točka B nalazi na negativnom dijelu osi Oy. Tada je $-m > 0$, $|OB| = \frac{12}{-m}$ i $P_{OAB} = \frac{4 \cdot \frac{12}{-m}}{2}$ pa iz $P_{OAB} = 6$ ovaj put slijedi $6 = \frac{24}{-m}$, tj. $m = -4$.

   Prema tome, tražene vrijednosti parametra m su $m = 4$ i $m = -4$.



.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je $n = \overline{abcd}$ broj s traženim svojstvima. Označimo zbroj njegovih znamenaka sa x, a zbroj znamenaka broja $n+1$ sa y. Naravno, $x = a+b+c+d$. Odmah je jasno da mora biti $d = 9$, jer je u protivnom $n + 1 = \overline{abc(d+1)}$ i odavde $y = a + b + c + (d + 1) = x + 1$, te je y paran broj. Dakle, tražimo brojeve oblika $n = \overline{abc9}$, takve da su $x = a+b+c+9$ i y neparni brojevi, tj. takve da je $z = a + b + c$ paran, a y neparan broj. Razlikujemo dva slučaja:

   (a) Ako je $c \neq 9$, tj. $c \in \{0, 1, \ldots, 8\}$, onda je $n+1 = \overline{ab(c+1)0}$, pa je $y = a+b+(c+1)+0 = z+1$ i on je neparan kadgod je z paran broj. Preme tome, u ovom slučaju tražimo brojeve oblika $n = \overline{abc9}$, takve da je $a \in \{0,1\}$, $b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $c \in \{0, 1, \ldots, 8\}$ i z je paran broj.
   Ako je $a = 0$, onda je z paran ako su znamenke b i c iste parnosti, tj. ili obje parne ili obje neparne. Ukoliko su znamenke b i c parne, takvih je brojeva $5 \cdot 5 = 25$ ($b, c \in \{0,2,4,6,8\}$). Ukoliko su znamenke b i c neparne, takvih brojeva ima $5 \cdot 4 = 20$ ($b \in \{1,3,5,7,9\}$, $c \in \{1,3,5,7\}$). Ukupno, takvih je brojeva $25 + 20 = 45$.
   Ako je $a = 1$, onda je z paran ako su znamenke b i c različite parnosti, tj. jedna je parna, a druga neparna. Ukoliko je b parno, a c neparno, takvih brojeva ima $5 \cdot 4 = 20$ ($b \in \{0,2,4,6,8\}$, $c \in \{1,3,5,7\}$). Ukoliko je b neparno, a c parno, takvih je brojeva

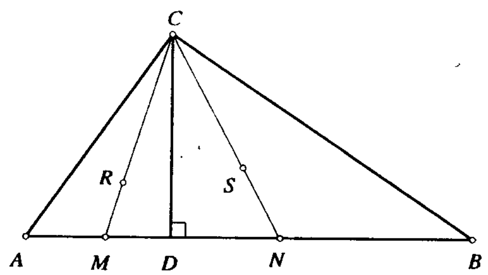
$5 \cdot 5 = 25$ ($b \in \{1,3,5,7,9\}$, $c \in \{0,2,4,6,8\}$). Ukupno, takvih je brojeva $20 + 25 = 45$. Zajedno, traženih brojeva sa znamenkom $c \neq 9$ ima $45 + 45 = 90$.

(b) Ako je $c = 9$, tada je nužno i $b = 9$, jer u protivnom imamo $n = \overline{ab99}$, $z = a + b + 9$, te $n + 1 = \overline{a(b+1)00}$ i $y = a + b + 1 = z - 8$, što je paran broj čim je z paran. Konačno, od brojeva oblika $n = \overline{a999}$ manjih od 2000 jedino broj 999 zadovoljava uvjete zadatka.

Dakle, traženih brojeva n ima 91.

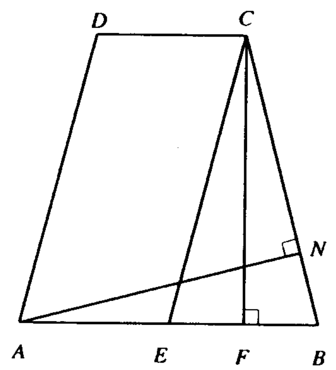
.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je $\angle BAC = \alpha$ i $\angle ABC = \beta$. Odmah je $\angle ABC = \angle ACD = \beta$ i $\angle BAC = \angle BCD = \alpha$, jer su to dva para šiljastih kutova s okomitim kracima. Također, očito je i $\angle BCN = \angle NCD = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle ACM = \angle MCD = \frac{\beta}{2}$, jer je pravac CN simetrala kuta $\angle BCD$, a pravac CM simetrala kuta $\angle ACD$. Kut $\angle ANC$ je vanjski kut trokuta BCN pa je $\angle ANC = \beta + \frac{\alpha}{2}$, a zbog $\angle ACN = \beta + \frac{\alpha}{2}$ nužno slijedi da je $\angle ANC = \angle ACN$, što znači da je trokut ACN jednakokračan, tj. $|AC| = |AN|$.
Na sličan način dokazujemo i drugu jednakost. Naime, kut $\angle BMC$ je vanjski kut trokuta AMC pa je $\angle BMC = \alpha + \frac{\beta}{2}$, a zbog $\angle BCM = \alpha + \frac{\beta}{2}$ slijedi da je $\angle BMC = \angle BCM$, što znači da je trokut BCM jednakokračan, tj. $|BC| = |BM|$.



.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Označimo s E polovište osnovice $\overline{AB}$ trapeza $ABCD$. Prema uvjetima zadatka tada je $|AE| = |EB| = |CD| = \frac{1}{2}|AB|$. Točkom C povucimo paralelu s dužinom $\overline{AD}$. Budući da je $|AE| = |CD|$, ona osnovicu $\overline{AB}$ siječe točno u polovištu E. Zbog $AE \parallel DC$ četverokut $AECD$ je paralelogram, a to znači da je $|AD| = |EC| = |BC|$. Iz toga zaključujemo da je trokut EBC jednakokračan. Neka je točka F nožište visine iz vrha C na osnovicu $\overline{EB}$ trokuta EBC. Tada je $|FB| = |EF| = \frac{1}{2}|EB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{4}|AB|$.
Lako se pokaže da je $\triangle ANB \cong \triangle CFB$. Naime, $|AB| = |BC|$, $\angle ABN = \angle CBF$ je zajednički kut i $\angle ANB = \angle CFB = 90^\circ$. Iz dokazane sukladnosti dalje slijedi da je $|BN| = |FB| = \frac{1}{4}|AB|$, a zbog $|AB| = |BC|$ vrijedi jednakost $|BN| = \frac{1}{4}|BC|$, što znači da je $|NC| = \frac{3}{4}|BC|$.
Dalje je lako. Iz $|BC| = 4|BN|$ slijedi da je $|NC| = \frac{3}{4} \cdot 4|BN|$ ili $|NC| = 3|BN|$, tj. $|BN| : |NC| = 1 : 3$.



.... UKUPNO 10 BODOVA

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 8. RAZRED

1. Prema uvjetu zadatka vrijedi jednakost $\frac{a+1}{a+4}+\frac{5}{a-7}=\frac{a+1}{a+4}\cdot\frac{5}{a-7}$. Nakon zbrajanja, odnosno množenja razlomaka dobivamo nove jednakosti

$$\frac{(a+1)(a-7)+5(a+4)}{(a+4)(a-7)}=\frac{5(a+1)}{(a+4)(a-7)},$$

ili

$$\frac{a^2-a+13}{(a+4)(a-7)}=\frac{5a+5}{(a+4)(a-7)}.$$

Zbog jednakosti razlomaka s jednakim nazivnicima nužno slijedi da su im i brojnici jednaki. Zato je $a^2-a+13=5a+5$, odnosno $a^2-6a+8=0$ ili dalje redom $a^2-2a-4a+8=0$, $a(a-2)-4(a-2)=0$ i $(a-2)(a-4)=0$. Rješenja ove jednadžbe su $a-2=0$, tj. $a=2$ i $a-4=0$, tj. $a=4$. Prema tome, tražene vrijednosti su $a=2$ i $a=4$.
.... UKUPNO 10 BODOVA

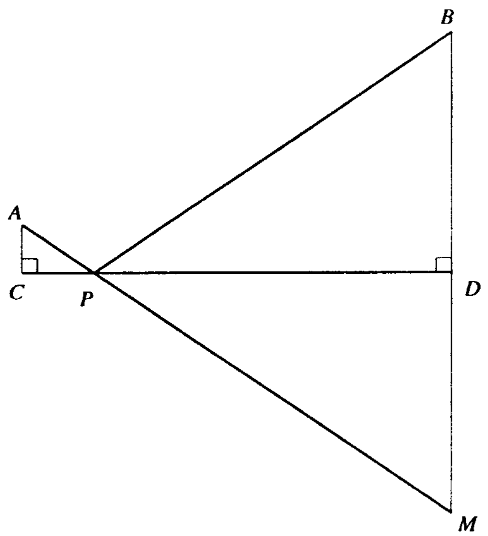
2. Zadani zbroj očito ima 2000 pribrojnika. Njega možemo napisati kao zbroj do 500 pribrojnika na sljedeći način:

$$\begin{aligned}2+2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{1999}+2^{2000}&=2\left(1+2+2^2+2^3\right)+2^5\left(1+2+2^2+2^3\right)+\\&+\cdots+2^{1993}\left(1+2+2^2+2^3\right)+2^{1997}\left(1+2+2^2+2^3\right)\\&=2\cdot15+2^5\cdot15+2^9\cdot15+\cdot+2^{1993}\cdot15+2^{1997}\cdot15\\&=30+2^4\cdot30+2^8\cdot30+\cdots+2^{1992}\cdot30+2^{1996}\cdot30\ .\end{aligned}$$

Budući da je svaki od 500 pribrojnika djeljiv s 30, slijedi da je i zadani zbroj djeljiv s 30.
.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Budući da je $2000=15\cdot133+5$, zadnji precrtani broj u prvom krugu bit će $133\cdot15+1$, tj. 1996. Zbog $1996+15=2011$ zaključujemo da će u drugom krugu biti precrtani redom brojevi $11,26,41,\ldots,1991$, jer je $132\cdot15+11=1991$. Dalje zbog $1991+15=2006$ zaključujemo da će u trećem krugu redom biti precrtani brojevi $6,21,36,\ldots,1986$, jer je $132\cdot15+6=1986$. Zbog $1986+15=2001$ zaključujemo da će prvi precrtani broj u četvrtom krugu biti broj 1, što znači da će on prvi biti precrtan po drugi put.
Svi precrtani brojevi u prvom krugu imaju oblik $15k+1=5\cdot3k+1$, svi precrtani brojevi u drugom krugu su oblika $15k+11=5\cdot(3k+2)+1$, a svi precrtani brojevi u trećem krugu su oblika $15k+6=5\cdot(3k+1)+1$. Zbog različitih ostataka pri dijeljenju s 15 u svakom od prva tri kruga, nije moguće da prije broja 1 bude precrtan neki drugi broj.
Dakle, svi precrtani brojevi su oblika $5x+1$, gdje je $x\in\{0,1,\ldots,399\}$, tj. pri dijeljenju s 5 daju ostatak 1. Treba odrediti ukupan broj takvih brojeva manjih od 2000. Najmanji od njih je 1, a najveći je očito 1996. Njih je ukupno 400. Prema tome, nakon što je broj 1 precrtan po drugi puta, neprecrtanih je ostalo još 2000-400, tj. 1600 brojeva.
.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je točka M simetrična točki B s obzirom na pravac p, a neka je točka P presjek pravaca AM i p. Tada je $\triangle PDB\cong\triangle PDM$, jer je $|BD|=|DM|$ zbog simetrije, $\angle PDB=\angle PDM=90^\circ$, a $\overline{PD}$ je zajednička stranica. Iz dokazane sukladnosti trokuta slijedi da je $\angle DPB=\angle DPM$ i $|PB|=|PM|$, a to znači da je $|AP|+|PB|=|AP|+|PM|$.
Budući da točke A,P i M leže na istom pravcu, zaključujemo da je zbroj $|AP|+|PM|=|AP|+|PB|$ najmanji moguć, što znači da je P tražena točka. Zbog $\angle CPA=\angle DPM$, jer su to vršni kutovi, i $\angle DPB=\angle DPM$, nužno slijedi da je $\angle CPA=\angle DPB$. Sad je jasno da trokuti $\triangle ACP$ i $\triangle BDP$ imaju jednake kutove pa zaključujemo da je $\triangle ACP\sim\triangle BDP$.
Iz dokazane sličnosti trokuta slijedi da su duljine stranica tih trokuta proporcionalne. Neka je $|CP|=x$. Tada je $|PD|=114-x$. Zato vrijedi razmjer $|AC|:|CP|=|BD|:|PD|$, ili dalje redom: $13:x=65:(114-x)$, $65x=13(114-x)$, $65x=13\cdot114-13x$, $78x=13\cdot114$, $x=19$. Prema tome je $|CP|=19$, a $|PD|=114-19$, tj. $|PD|=95$.



.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Zbog $MN \parallel AC$ slijedi da trokuti MBN i ABC imaju jednake kutove, što zanči da je $\triangle MBN \sim \triangle ABC$. Iz dokazane sličnosti trokuta slijedi da vrijedi razmjer $\frac{|MB|}{|MN|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ ili $\frac{|MB|}{|AB|} = \frac{|MN|}{|AC|}$. Isto tako, zbog $MN \parallel BD$ trokuti AMN i ABD imaju jednake kutove pa je $\triangle AMN \sim \triangle ABD$. Iz dokazane sličnosti trokuta slijedi razmjer $\frac{|AM|}{|MN|} = \frac{|AB|}{|BD|}$ ili $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|MN|}{|BD|}$. Zbrojimo li jednakosti iz prve i druge sličnosti, dobivamo redom jednakosti:

$$\frac{|MN|}{|AC|} + \frac{|MN|}{|BD|} = \frac{|MB|}{|AB|} + \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|MB| + |AM|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AB|} = 1.$$

Konačno, dijeljenjem s $|MN|$ dobivamo traženu jednakost, tj. $\frac{1}{|MN|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|BD|}$.

.... UKUPNO 10 BODOVA