MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

7. travnja 2000.

I. razred

1. Odredite znamenke $a \neq 0$, b, c i d tako da razlomak

$$\frac{a}{b+c+d}$$

ima decimalni zapis $0.abc$.

2. U trokutu ABC je $|AC| = 6$, $|BC| = 2$ i $\sphericalangle ACB = 120°$. Simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Odredite duljinu dužine $\overline{CD}$.

3. Realni brojevi a i b zadovoljavaju ove jednakosti:

$$a^3 - 3ab^2 = 44, \qquad b^3 - 3a^2b = 8.$$

Koliko je $a^2 + b^2$?

4. Neka je na paralelnim pravcima a i b dano je redom m i n točaka. Svaka od danih točaka na pravcu a i svaka od danih točaka na pravcu b određuju dužinu. Koliko ima sjecišta parova tako dobivenih dužina koja ne leže na pravcima a ili b?

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Dani razlomak možemo zapisati u obliku

$$\frac{a}{b+c+d}=\frac{100a+10b+c}{1000},\quad \text{tj.}$$

$$1000a=(b+c+d)(100a+10b+c).$$

Odavde vidimo da mora biti $b+c+d<10$. 5 bodova

1) Ako je $b+c+d=9$, onda je

$$1000a=9(100a+10b+c),\quad \text{tj.}\quad 100a=90b+9c.$$

Odavde slijedi, $c=0$, $b=0$, $a=0$, što nije moguće. 5 bodova

2) Ako je $b+c+d=8$, onda je $25a=10b+c$.

Moramo promatrati nekoliko slučajeva:

a) $a=1 \quad \Rightarrow \quad b=2,\ c=5,\ d=1$, što zadovoljava jer je $\frac{1}{8}=0.125$.

b) $a=2 \quad \Rightarrow \quad b=5,\ c=0,\ d=3$, što također zadovoljava jer je $\frac{2}{8}=0.250$.

c) $a=3 \quad \Rightarrow \quad b=7,\ c=5$, što nije moguće jer mora biti $b+c\le 8$.

d) $4\le a\le 9: \quad \Rightarrow \quad 25a\ge 100$, a $10b+c<100$, pa u ovom slučaju nema rješenja. 10 bodova

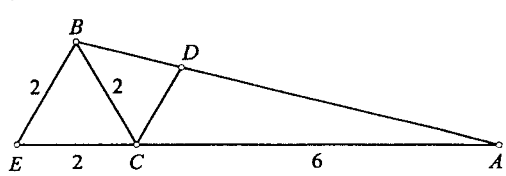
3) Ako je $b+c+d=k\le 7$, onda je

$$1000a=(b+c+d)(100a+10b+c)=k(100a+10b+c),$$

$$\text{tj.}\ (10-k)\cdot 100a=k(10b+c).$$

Odavde je $b=c=0$, tj. $a=0$, što je suprotno pretpostavci. 5 bodova

2. Neka je E točka na pravcu AC tako da je C između A i E, te $|CE|=|CB|$.



5 bodova

Trokut ECB je jednakostraničan i $BE \parallel DC$, pa iz sličnosti trokuta ACD i AEB dobivamo

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|EB|}{|AE|} \quad \text{tj.} \quad |CD| = \frac{3}{2}.$$ 20 bodova

3. Vrijedi

$$(a^3 - 3ab^2)^2 + (b^3 - 3a^2b)^2 = 44^2 + 8^2 = 2000.$$

S druge strane je

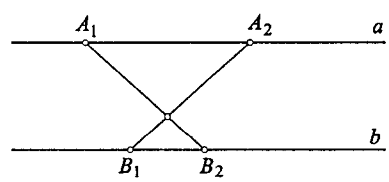
$$\begin{aligned}(a^3 - 3ab^2)^2 + (b^3 - 3a^2b)^2 &= a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 \\ &\quad + b^6 - 6a^2b^4 + 9a^2b^4 \\ &= a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 \\ &= (a^2 + b^2)^3.\end{aligned}$$

Odavde se dobiva, $(a^2 + b^2)^3 = 2000$, tj. $a^2 + b^2 = 10\sqrt[3]{2}$. 25 bodova

4. Neka su A_i, $1 \leq i \leq m$ točke na pravcu a, a B_k, $1 \leq j \leq n$ točke na pravcu b. Svaki par točaka (A_i, A_j), $i \neq j$, i svaki par (B_k, B_l), $k \neq l$, određuju po jedno sjecište. Ako su P i Q brojevi parova promatranih točaka na pravcima a i b, onda je broj sjecišta jednak $P \cdot Q$. 10 bodova

Odredimo broj parova točaka na pravcu a. Prvu točku para možemo izabrati na m načina, a onda drugu na $m - 1$ načina. To bi ukupno dalo $m(m-1)$ parova. Međutim parovi (A_i, A_j) i (A_j, A_i) su isti, pa moramo broj $m(m-1)$ podijeliti s 2. Dakle, broj parova na pravcu a je $\frac{m(m-1)}{2}$.
Analogno se dobiva da je broj parova točaka na pravcu b jednak $\frac{n(n-1)}{2}$.
Prema tome broj svih sjecišta je

$$\frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$ 15 bodova



MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

7. travnja 2000.

II. razred

1. U kompleksnoj ravnini promatrajte skup svih točaka z oblika $(4t+1)+(3t+7)i$, gdje je t realan broj. Što je taj skup?

   Odredite onaj broj iz tog skupa koji ima najmanju apsolutnu vrijednost.

2. Za koje realne brojeve a je najmanja vrijednost funkcije

$$f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$$

   na intervalu $[0, 2]$ jednaka 3?

3. U šiljastokutnom trokutu ABC povučene su visine $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$. Kroz ortocentar H je povučen pravac koji siječe stranice trokuta $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama M i N. Neka je M' nožište okomice iz M na $\overline{BB'}$ i N' nožište okomice iz N na $\overline{CC'}$. Dokažite da je $M'C' \parallel N'B'$.

4. Na dvije suprotne strane kockice nalazi se po jedna točka, na druge dvije suprotne strane po dvije i na preostale dvije po tri točke. Od osam takvih kockica napravljena je kocka $2 \times 2 \times 2$, te se prebroji koliko točaka ima na svakoj strani. Može li se na taj način dobiti šest uzastopnih prirodnih brojeva?

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Točki (x, y) koordinatne ravnine pridružen je kompleksni broj $z = x + iy$. U našem slučaju je $x = 4t + 1$, $y = 3t + 7$. Odavde je $t = \frac{x-1}{4}$, $t = \frac{y-7}{3}$, pa slijedi $\frac{x-1}{4} = \frac{y-7}{3}$ ili $3x - 4y + 25 = 0$, pa je traženi skup točaka pravac čija je ovo jednadžba. 15 bodova

Sada je

$$|z| = \sqrt{(4t+1)^2 + (3t+7)^2} = 5\sqrt{t^2 + 2t + 2}.$$

Kako je $t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1 \geq 1$, onda je $|z| \geq 5$, i minimalna vrijednost se dostiže za $t = -1$. Tada je $x = -3$, $y = 4$.
Dakle, od svih promatranih kompleksnih brojeva, najmanji modul ima broj $z = -3 + 4i$. 10 bodova

2. Minimalna vrijednost funkcije $f(x)$ na skupu realnih brojeva poprima se za $x = \frac{a}{2}$, (ovo je tjeme parabole). 4 boda

Moramo razmotriti tri slučaja:

1) Za $\frac{a}{2} \in [0, 2]$ tj. $a \in [0, 4]$ moralo bi biti

$$f(\frac{a}{2}) = 4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4a \cdot \frac{a}{2} + a^2 - 2a + 2 = 3$$

odakle slijedi $a = -\frac{1}{2} \notin [0, 4]$, što nije moguće. 7 bodova

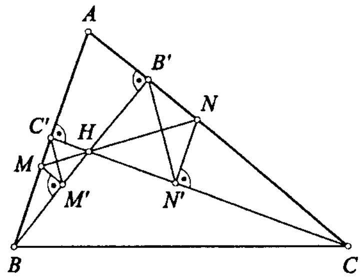
2) Za $\frac{a}{2} < 0$, tj. $a < 0$ funkcija $f(x)$ je rastuća na intervalu $[0, 2]$, te ima minimum za $x = 0$. Iz $f(0) = a^2 - 2a + 2 = 3$ dobiva se $a_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Zbog $a < 0$ je $a = 1 - \sqrt{2}$. 7 bodova

3) Za $\frac{a}{2} > 2$, tj. $a > 4$, funkcija $f(x)$ pada na intervalu $[0, 2]$, pa poprima najmanju vrijednost za $x = 2$. U ovom slučaju je

$$f(2) = 16 - 8a + a^2 - 2a + 2 = 3, \text{ tj. } a^2 - 10a + 15 = 0.$$

Odavde se dobiva $a_{1,2} = 5 \pm \sqrt{10}$. Zbog $a > 4$ je $a = 5 + \sqrt{10}$.
Dakle, uvjeti zadatka su zadovoljeni za $a = 1 - \sqrt{2}$ i $a = 5 + \sqrt{10}$. 7 bodova

3. Četverokut $MM'HC'$ je tetivni jer ima dva nasuprotna prava kuta. Isto vrijedi za $HN'NB'$.



Kako je $MM' \parallel B'N$ to je $\sphericalangle M'MH = \sphericalangle HNB'$ (kutovi s paralelnim kracima).
Nadalje, $\sphericalangle M'C'H = \sphericalangle M'MH = \sphericalangle HNB' = \sphericalangle HN'B'$, pa je $M'C' \parallel N'B'$ (kutovi s paralelnim kracima). 25 bodova

4. Od svake kockice vidljive su tri strane, koje se sastaju u jednom vrhu, pa su na njima po 1, 2 i 3 točke. Stoga je ukupan broj točaka na stranicama veće kocke $8 \cdot (1 + 2 + 3) = 48$.
Suma 6 uzastopnih prirodnih brojeva je uvijek neparan broj (suma tri parna i tri neparna broja) pa 48 ne može biti suma 6 uzastopnih prirodnih brojeva. Stoga nije moguće dobiti 6 uzastopnih prirodnih brojeva na način opisan u zadatku. 25 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

7. travnja 2000.

III. razred

1. Riješite jednadžbu

$$\log_2^2(x+y) + \log_2^2(xy) + 1 = 2\log_2(x+y).$$

2. Dokažite da u pravokutnom trokutu vrijedi

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \geq \frac{2ab}{c^2},$$

gdje su α i β šiljasti kutovi, a i b duljine kateta i c duljina hipotenuze.

3. Odredite sve parove (x, y) realnih brojeva za koje je

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y.$$

4. Težište tetraedra $ABCD$ je točka T čiji je radijus-vektor dan sa

$$\vec{r}_T = \frac{1}{4}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D).$$

Ako je težište jednako udaljeno od vrhova A i B, dokažite da je

$$|AC|^2 + |AD|^2 = |BC|^2 + |BD|^2.$$

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Zapišimo jednadžbu u obliku

$$\log_2^2(xy) + (\log_2(x+y) - 1)^2 = 0.$$

Time dobivamo sustav jednadžbi

$$\log_2(xy) = 0, \qquad \log_2(x+y) = 1$$ 15 bodova

Odavde dobivamo jednadžbe

$$xy = 1, \qquad x + y = 2,$$

čije rješenje je $x = y = 1$. 10 bodova

2. *Prvo rješenje.* Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za pozitivne brojeve $\sin\alpha$ i $\sin\beta$ je

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} \geq \sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$$

a odavde

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \geq \sqrt{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Kako je $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ i $\sin\beta = \frac{b}{c}$, iz posljednje nejednakosti slijedi

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \geq \sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}}, \quad \text{tj.}$$

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \geq \frac{2ab}{c^2}.$$

25 bodova

Drugo rješenje. Nejednakost iz zadatka redom je ekvivalentna sa

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \geq \frac{2c\sin\alpha\cdot c\sin\beta}{c^2}, \quad (a=c\sin\alpha, b=c\sin\beta)$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \geq 2\sin\alpha c\sin\beta$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \geq \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \geq \cos(\alpha-\beta), \quad (\text{jer je } \alpha+\beta=90^\circ)$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \geq 2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-1$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \leq 1,$$

a posljednja nejednakost očito vrijedi, pa vrijedi i polazna nejednakost. 25 bodova

3. Nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}=8+\frac{1}{2}\sin y.$$ 5 bodova

Ovo možemo zapisati u obliku

$$2(\sin^4 x+\cos^4 x)\left(1+\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\right)=16+\sin y.$$

Zbog $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ i $\sin^4 x\cos^4 x=\frac{1}{16}\sin^4 2x$, dobivamo

$$(2-\sin^2 2x)\left(1+\frac{16}{\sin^4 2x}\right)=16+\sin y.$$

Kako je prvi izraz na lijevoj strani ≥ 1, drugi ≥ 17, a izraz na desnoj strani je ≤ 17, moraju svugdje biti jednakosti. 15 bodova

Dakle,

$$\sin^2 2x=1, \quad \sin^4 2x=1, \quad \sin y=1,$$

pa je

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, \quad y=\frac{\pi}{2}+2l\pi, \quad k,l\in \mathbf{Z}.$$ 5 bodova

4. Radijus vektori točaka A, B, C i D označeni su sa $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ i $\vec{r}_D$. Dani uvjet možemo zapisati u obliku

$$\overrightarrow{AT}^2 = \overrightarrow{BT}^2.$$ 5 bodova

Iz

$$(\vec{r}_T - \vec{r}_A)^2 = (\vec{r}_T - \vec{r}_B)^2,$$

slijedi

$$\vec{r}_A^{\,2} - \vec{r}_B^{\,2} - 2\vec{r}_A \cdot \vec{r}_T + 2\vec{r}_B \cdot \vec{r}_T = 0,$$

odnosno uvrštavajući $\vec{r}_T$,

$$\vec{r}_A^{\,2} - \vec{r}_B^{\,2} - \vec{r}_A \cdot \vec{r}_C + \vec{r}_B \cdot \vec{r}_C - \vec{r}_A \cdot \vec{r}_D + \vec{r}_B \cdot \vec{r}_D = 0. \quad (1)$$ 10 bodova

Treba pokazati da je

$$(\vec{r}_C - \vec{r}_A)^2 + (\vec{r}_D - \vec{r}_A)^2 - (\vec{r}_C - \vec{r}_B)^2 - (\vec{r}_D - \vec{r}_B)^2 = 0. \quad (2)$$ 5 bodova

Sada se pokaže da je jednakost (2) ekvivalentna jednakosti (1). 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

7. travnja 2000.

IV. razred

1. Za koje realne parametre a postoji kompleksan broj z takav da je

$$|z+\sqrt{2}| = \sqrt{a^2-3a+2} \quad \text{i} \quad |z+i\sqrt{2}| < a?$$

2. (a) Ako su $x_1,\ x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$, dokažite:

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2} \leq \cos\frac{x_1+x_2}{2}.$$

(b) Ako su $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2^k} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, dokažite:

$$\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} \cos x_j \leq \cos\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} x_j\right), \quad \text{za } k \in \mathbf{N}.$$

(c) Ako su $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, dokažite:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \cos x_j \leq \cos\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right), \quad \text{za } n \in \mathbf{N}.$$

3. (a) Dokažite da se vrhovi $3n$-terostrane prizme mogu obojati s tri boje na takav način da svaki vrh bude spojen bridovima s vrhovima svih triju boja.

(b) Dokažite da ako se vrhovi n-terostrane prizme mogu obojati s tri boje tako da je svaki vrh spojen bridovima s vrhovima svih triju boja, onda je n djeljiv s 3.

4. Graf polinoma P je centralno simetričan s obzirom na točku $S(a, b)$ ako i samo ako postoji polinom Q takav da je

$$P(x) = b + (x-a)Q((x-a)^2), \quad \text{za svaki } x \in \mathbf{R}.$$

Dokažite!

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Prema prvom uvjetu je $a^2 - 3a + 2 \geq 0$ tj. $a \leq 1$ ili $a \geq 2$, prema drugom, $a > 0$. Iz ova dva uvjeta slijedi $0 < a \leq 1$ ili $2 \leq a$. 2 boda
Jednakost $|z + \sqrt{2}|^2 = a^2 - 3a + 2$ zadovoljavaju svi kompleksni brojevi $z = x + iy$ za koje je

$$(x + \sqrt{2})^2 + y^2 = a^2 - 3a + 2.$$

Ovaj uvjet zadovoljavaju sve točke kružnice sa središtem u $(-\sqrt{2}, 0)$ polumjera $\sqrt{a^2 - 3a + 2}$. 5 bodova
Nejednakost $|z + i\sqrt{2}|^2 < a^2$ zadovoljavaju svi kompleksni brojevi $z = x + iy$ za koje je

$$x^2 + (y + \sqrt{2})^2 < a^2,$$

a to su svi kompleksni brojevi (strogo) unutar kružnice sa središtem u točki $(0, -\sqrt{2})$ polumjera a. 5 bodova
Udaljenost središta je $d = 2$.
Kompleksan broj z koji zadovoljava uvjete zadatka, tj. leži na prvoj i unutar druge kružnice postojat će ako je udaljenost središta tih dviju kružnica manja od zbroja polumjera kružnica. Dakle,

$$2 < \sqrt{a^2 - 3a + 2} + a \quad \text{tj.} \quad 2 - a < \sqrt{a^2 - 3a + 2}.$$ 8 bodova

Ako je $a > 2$, uvjet je ispunjen.
Slučaj $a = 2$ ne zadovoljava uvjet.
Ako je $0 < a \leq 1$, onda nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo $a > 2$, što je suprotno pretpostavci.
Prema tome, rješenje je $a > 2$. 5 bodova

2. (a) Nejednakost slijedi iz

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2} = \cos\frac{x_1 + x_2}{2} \cos\frac{x_1 - x_2}{2} \leq \cos\frac{x_1 + x_2}{2},$$

zbog $x_1 - x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\cos\frac{x_1 - x_2}{2} \in [0, 1]$. 5 bodova

(b) Dokazuje se indukcijom po k iz (a). 5 bodova

(c) Pod (b) je pokazano da nejednakost vrijedi za proizvoljno velike brojeve 2^k. Da bismo dokazali da vrijedi i za sve ostale brojeve, dovoljno je pokazati da ako vrijedi za neki $n > 2$ onda vrijedi i za $n - 1$. 5 bodova
Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za neki $n > 2$. Neka je

$$x_n = \frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n - 1}.$$

Tada je

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos x_j \leq \cos\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}+\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}}{n}$$

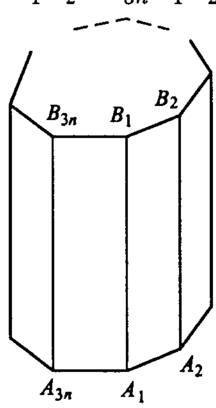
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\cos x_j + \frac{1}{n}\cos\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1} \leq \cos\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1},$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\cos x_j \leq \cos\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1},$$

tj. nejednakost vrijedi i za $n-1$, a onda vrijedi za svaki prirodan broj $n \geq 2$. 10 bodova

3. (a) Neka su vrhovi prizme $A_1A_2 \ldots A_{3n}B_1B_2 \ldots B_{3n}$ kao na slici:



Obojimo vrhove A_k i B_k

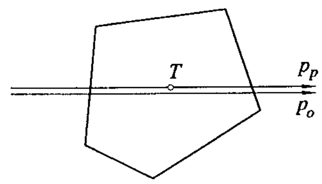
- plavom bojom, ako je $k \equiv 0 \pmod 3$
- zelenom bojom, ako je $k \equiv 1 \pmod 3$
- žutom bojom, ako je $k \equiv 2 \pmod 3$

Lako je provjeriti da ovo bojanje zadovoljava uvjete zadatka. Provjerit ćemo za vrhove A_k.
Vrhu A_k $(2 \leq k \leq 3n-1)$ susjedni su vrhovi A_{k-1}, B_k i A_{k+1} raznobojni.
Vrhu A_1 susjedni su vrhovi A_{3n}, B_1 i A_2, obojani redom plavom, zelenom i žutom bojom, dok vrhu A_{3n} susjedni vrhovi A_{3n-1}, B_{3n} i A_1, obojani žutom, plavom i zelenom bojom. 10 bodova

(b) Neka su vrhovi n-terostrane prizme obojani na opisani način plavom, zelenom i žutom bojom. Promatrajmo broj plavih vrhova. Svaki od $2n$ vrhova prizme ima točno jedan susjedni plavi vrh, no svaki (plavo obojani) vrh susjedan je s tri vrha. Stoga je broj plavih vrhova $2n/3$. Kako je taj broj cijeli, zaključujemo da $3|n$. 15 bodova

Napomena. Zadatak se može riješiti i analizom mogućih bojanja.

b) Pretpostavimo da su za svaki smjer pravci koji raspolavljaju površinu, odnosno opseg, različiti. Povucimo te pravce (označimo ih s p_P i p_O) i promatrajmo ih u horizontalnom položaju orijentiranima, npr. na desno i neka je, npr. pravac p_P lijevo (tj. iznad) pravca p_O. Zakrećimo sada ta dva pravca oko točke T na p_P u pozitivnom smjeru. Cijelo vrijeme će pravac p_P biti lijevo od pravca p_O. Međutim, nakon zakreta za kut π bi pravac p_P trebao biti lijevo (tj. ispod) pravca p_O, što je kontradikcija. Dakle, pretpostavka je kriva, pa postoji smjer za koji je $p_P = p_O$.



15 bodova

Napomena. Također se mogu promatrati pravci koji prolaze kroz neku točku mnogokuta i rotiraju oko te točke.

4. (1) Dovoljnost. Označimo $h = x - a$, tj. $x = a + h$. Tada je

$$\begin{aligned} P(a-h) &= b - hQ(h^2) \\ P(a+h) &= b + hQ(h^2) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{P(a-h) + P(a+h)}{2} = b, \quad \text{za svaki } h \in \mathbf{R},$$

tj. graf je centralno simetričan u odnosu na točku (a, b). 10 bodova

(2) Nužnost. Neka je $x = a + h$, $P(x) = P(a + h) = R(h)$. Uvjet

$$\frac{P(a-h) + P(a+h)}{2} = b \quad \Leftrightarrow \quad R(-h) + R(h) = 2b,$$

jer je $P(a - h) = R(-h)$. Neka je $R(h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n$. Tada se gornji uvjet zapisuje u obliku

$$a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + a_0 - a_1 h + a_2 h^2 - ... + (-1)^n a_n h^n = 2b, \quad \text{tj.}$$

$$a_0 + a_2 h^2 + ... + a_m h^m = b, \quad \text{za svaki } h \in \mathbf{R},$$

gdje je $m = n$ za n parno i $m = n - 1$ za n neparno. Stoga je $a_2 = a_4 = ... = a_m = 0$, $a_0 = b$. Sada je

$$R(h) = b + a_1 h + a_3 h^3 + ...,$$

pa postoji polinom Q takav da je $R(h) = b + hQ(h^2)$, za neki polinom Q, te konačno

$$P(x) = R(h) = b + (x - a)Q((x - a)^2).$$

15 bodova