MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

10. DRŽAVNI SUSRET MLADIH MATEMATIČARA REPUBLIKE HRVATSKE

Makarska, 9.–12. svibnja 2001. godine

Zadaci za 7. razred

1. Riješi jednadžbu $||x-1|-6|=2$.

2. Zbroj dvaju prirodnih brojeva je 4923. Dopišemo li jednome od ta dva broja s desne strane znamenku 7, a drugome obrišemo znamenku jedinica, dobiveni će brojevi biti jednaki. Odredi polazne brojeve.

3. Ivana je izašla iz kuće nekoliko minuta nakon 18 sati. U trenutku izlaska pogledala je na svoj ručni sat i zapazila da kazaljke na njemu zatvaraju kut od 110°. Kući se vratila nešto prije 19 sati istoga dana, iznenadivši se kad je na ulasku u kuću vidjela da kazaljke na satu opet zatvaraju kut od 110°. Koliko je minuta Ivana bila odsutna od kuće, ukoliko je poznato da je njen sat točan?

4. Stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC neki pravac p siječe redom u točkama M i N, tako da osnosimetrična točka C_1 vrha C s obzirom na taj pravac leži na stranici $\overline{AB}$ i pri tome je $|AC_1|=|AM|$ i $|BC_1|=|BN|$. Koliki je kut $\sphericalangle ACB$?

5. Dan je trokut ABC sa stranicama duljina $|AB|=9$, $|BC|=18$ i $|AC|=12$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka M, tako da okomica točkom M na simetralu kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki P, okomica točkom M na simetralu kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki Q i pri tome je $|CQ|=2|CP|$. U kojem omjeru točka M dijeli stranicu $\overline{AB}$?

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

10. DRŽAVNI SUSRET MLADIH MATEMATIČARA REPUBLIKE HRVATSKE

Makarska, 9.-12. svibnja 2001. godine

Zadaci za 8. razred

1. Za realne brojeve x i y vrijede jednakosti $x+y=18$ i $x^2+y^2=170$. Koje vrijednosti može poprimiti razlika $x-y$?

2. Dan je niz od nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva. Broj prirodnih brojeva u tom nizu za 2 je manji od dvostrukog najmanjeg od njih, a njihova aritmetička sredina iznosi 12.5. Koji su to brojevi?

3. Dvije ravne ceste sijeku se u točki O pod pravim kutom. Tim cestama kreću se prema križanju O dva biciklista, prvi brzinom od 30 km/h, a drugi od 40 km/h. U jednom trenutku prvi je biciklist na svojoj cesti od križanja O udaljen 10 km, a drugi biciklist na svojoj cesti 30 km. Za koje će vrijeme od tog trenutka biciklisti biti najmanje udaljeni jedan od drugoga? Kolika je ta udaljenost?

4. Ako se dijagonale konveksnog četverokuta sijeku pod kutom od 30°, onda je površina tog četverokuta jednaka jednoj četvrtini umnoška duljina njegovih dijagonala. Dokaži!

5. Dan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C, tako da je $|AC| > |BC|$. Neka je točka D polovište hipotenuze $\overline{AB}$ tog trokuta, a p pravac točkom D, okomit na pravac CD. Pravac p siječe pravac BC u točki E, a dužinu $\overline{AC}$ u točki F. Dokaži da okomica iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$ siječe dužinu $\overline{EF}$ u njezinu polovištu.

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 7. RAZRED

1. Prema definiciji apsolutne vrijednosti realnog broja razlikujemo dva slučaja:

(1) Ukoliko je $|x-1|-6 \geq 0$, jednadžba iz zadatka poprima oblik $|x-1|-6=2$, tj. $|x-1|=8$. Sada opet razlikujemo dva slučaja:

(a) Ako je $x-1 \geq 0$, jednadžba $|x-1|=8$ poprima oblik $x-1=8$ pa je $x=9$ prvo rješenje polazne jednadžbe.

(b) Ako je $x-1<0$, jednadžba $|x-1|=8$ prelazi u $x-1=-8$ pa je $x=-7$ drugo rješenje polazne jednadžbe.

(2) Ukoliko je $|x-1|-6<0$, polazna jednadžba poprima oblik $|x-1|-6=-2$, odnosno $|x-1|=4$. I ovdje opet razlikujemo dva slučaja:

(a) Ako je $x-1 \geq 0$, jednadžba $|x-1|=4$ postaje $x-1=4$ pa je $x=5$ treće rješenje polazne jednadžbe.

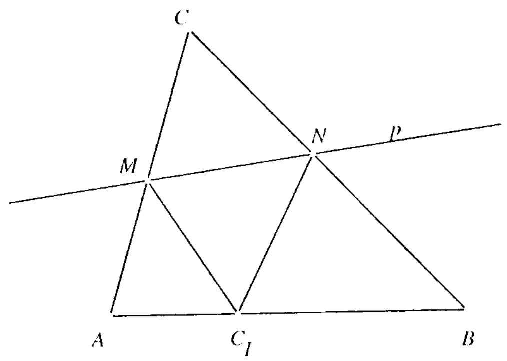
(b) Ako je $x-1<0$, jednadžba $|x-1|=4$ prelazi u $x-1=-4$ pa je $x=-3$ četvrto rješenje polazne jednadžbe.

Prema tome, sva rješenja zadane jednadžbe su $x_1=9$, $x_2=-7$, $x_3=5$ i $x_4=-3$.
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je x jedan od polaznih brojeva. Dopišemo li mu s desne strane znamenku 7, dobit ćemo broj $10x+7$. Označimo s y broj kojeg dobijemo nakon što drugom polaznom broju izbrišemo znamenku jedinica, a tu izbrisanu znamenku označimo s n. Dakle, drugi polazni broj je $10y+n$. Zbog prvog uvjeta zadatka vrijedi jednakost $x+10y+n=4923$, dok je iz drugog uvjeta $10x+7=y$. Pomnožimo li drugu jednakost s 10 i dobiveno supstituiramo u prvu jednakost, slijedi $x+100x+70+n=4923$, tj. $101x+n=4853$. Budući da je n znamenka, tj. jedan od brojeva $0,1,2,\ldots,9$, lako zaključujemo da je x količnik, a n ostatak pri dijeljenju broja 4853 sa 101. Dijeljenjem dobivamo $4853=101\cdot 48+5$, što znači da je $x=48$ i $n=5$. Zato je $y=10\cdot 48+7=487$.
Prema tome, polazni su brojevi bili 48 i 4875.
.... UKUPNO 10 BODOVA

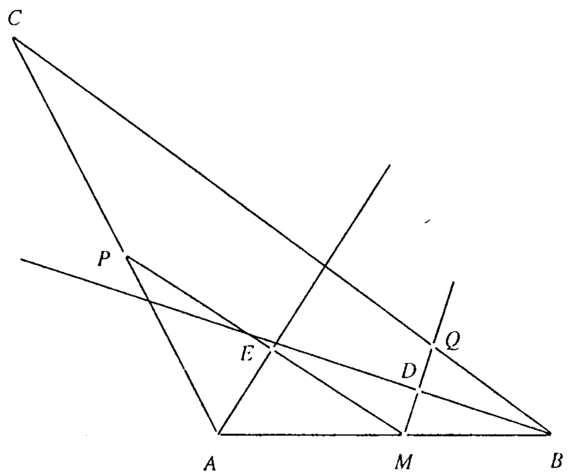
3. Velikoj kazaljci potreban je 1 sat, a maloj 12 sati za opisivanje punog kuta. Zato velika kazaljka u 1 minuti opiše kut od $360^\circ : 60 = 6^\circ$, a mala od $360^\circ : (12\cdot 60) = 0.5^\circ$. Neka je x u minutama izraženo vrijeme proteklo od 18 sati do trenutka kada je Ivana izašla iz kuće. Za to je vrijeme velika kazaljka opisala kut od $6x$ stupnjeva, a mala od $0.5x$ stupnjeva. Budući da su u 18 sati velika i mala kazaljka zatvarale kut od 180°, zaključujemo da su u trenutku Ivaninog izlaska iz kuće one zatvarale kut od $180-6x+0.5x$ stupnjeva. Zbog uvjeta zadatka zato je $180-6x+0.5x=110$, a rješenje ove jednadžbe je $x=12\frac{8}{11}$. To znači da je Ivana iz kuće izašla $12\frac{8}{11}$ minuta nakon 18 sati.
Označimo s y u minutama izraženo vrijeme proteklo od 18 sati do trenutka kada se Ivana vratila kući. Za to vrijeme velika je kazaljka opisala kut od $6y$, a mala od $0.5y$ stupnjeva. Kut kojeg kazaljke na satu zatvaraju u trenutku Ivaninog povratka kući dobit ćemo tako da od kuta $6y$ stupnjeva oduzmemo kut od 180° (kut kojeg kazaljke zatvaraju u 18 sati) i kut od $0.5y$ stupnjeva. Dakle, taj kut iznosi $6y-(180+0.5y)$ stupnjeva. Prema uvjetu zadatka zato je $6y-(180+0.5y)=110$, a rješenje ove jednadžbe je $y=52\frac{8}{11}$. To znači da je od 18 sati do Ivaninog povratka kući prošlo $52\frac{8}{11}$ minuta.
Prema tome, Ivana je od kuće bila odsutna $52\frac{8}{11}-12\frac{8}{11}=40$ minuta.
.... UKUPNO 10 BODOVA

4.



Zbog osne simetrije je $\gamma = \sphericalangle ACB = \sphericalangle MC_1N$. Prema uvjetima zadatka, trokuti AC_1M i BNC_1 su jednakokračni. Stoga je u $\triangle AC_1M$ očito $\sphericalangle AC_1M = \sphericalangle AMC_1$, odakle je $\sphericalangle AC_1M = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \alpha)$.
Također, u jednakokračnom trokutu BNC_1 vrijedi $\sphericalangle BC_1N = \sphericalangle BNC_1 = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \beta)$.
Kako je $\sphericalangle AC_1M + \sphericalangle MC_1N + \sphericalangle NC_1B = 180^\circ$, zamjenom dobivenih vrijednosti za kutove slijedi relacija $\frac{180^\circ - \alpha}{2} + \gamma + \frac{180^\circ - \beta}{2} = 180^\circ$, odnosno, sređivanjem, $2\gamma - \alpha - \beta = 0$.
Zbrojimo li ovu jednakost s jednakosti $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, koja vrijedi u svakom trokutu, dobijemo $3\gamma = 180^\circ$, tj. $\gamma = 60^\circ$.
Prema tome, $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.
.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



Neka je točka D presjek okomice MQ i simetrale kuta $\sphericalangle ABC$, a točka E presjek okomice MP i simetrale kuta $\sphericalangle BAC$. Lako se pokaže da je $\triangle BDM \cong \triangle BDQ$. Naime, $\sphericalangle MBD = \sphericalangle QBD$ prema definiciji simetrale kuta, $\sphericalangle BDM = \sphericalangle BDQ = 90^\circ$, a stranica $\overline{BD}$ je zajednička. Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $|BM| = |BQ|$.
Na sličan način dokažemo i da je $\triangle AME \cong \triangle APE$. Naime, $\sphericalangle MAE = \sphericalangle PAE$ prema definiciji simetrale kuta, $\sphericalangle AEM = \sphericalangle AEP = 90^\circ$, a stranica $\overline{AE}$ je zajednička. Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $|AM| = |AP|$.
Uvedimo oznake $|AM| = |AP| = m$, $|BM| = |BQ| = n$ i $|CP| = x$. Tada je $|CQ| = 2x$, a zbog $|AM| + |MB| = |AB|$, $|BQ| + |QC| = |BC|$ i $|AP| + |PC| = |AC|$ vrijede sljedeće jednakosti: $m + n = 9$, $n + 2x = 18$ i $m + x = 12$. Zbrojimo li te tri jednakosti, dobivamo $2m + 2n + 3x = 39$, odnosno $2(m + n) + 3x = 39$. Zbog $m + n = 9$ imamo $2 \cdot 9 + 3x = 39$, odakle je $x = 7$. Dalje je $m = 12 - x = 12 - 7 = 5$ te $n = 9 - m = 9 - 5 = 4$.
Prema tome, traženi je omjer $|AM| : |MB| = m : n$, tj. $|AM| : |MB| = 5 : 4$.
.... UKUPNO 10 BODOVA

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

1. Kvadriramo li jednakost $x+y=18$, dobivamo $x^2+2xy+y^2=324$. Kako je $x^2+y^2=170$, imamo da je $2xy=324-170=154$. Oduzmemo li ovu jednakost od jednakosti $x^2+y^2=170$, dobivamo $x^2-2xy+y^2=170-154$, odnosno $(x-y)^2=16$. Dakle, $x-y=4$ ili $x-y=-4$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka su $n+1, n+2, \ldots, n+m$ traženi uzastopni prirodni brojevi. Očito je $n+1$ najmanji broj u tom nizu, a m broj članova toga niza. Prema uvjetu zadatka vrijedi jednakost $m+2=2(n+1)$, odakle je sređivanjem $m+2=2n+2$, tj. $m=2n$.

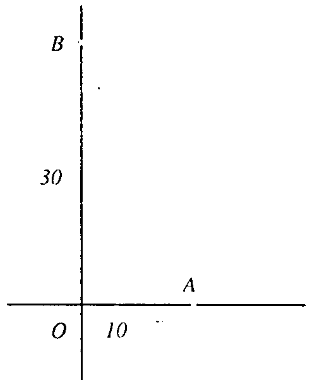
Prema Gaussovoj dosjetki, zbroj svih traženih uzastopnih prirodnih brojeva iznosi $\frac{(n+1+n+m)\cdot m}{2}$, tj. $\frac{(2n+m+1)\cdot m}{2}$. Zato je aritmetička sredina tih brojeva po definiciji jednaka $\frac{(2n+m+1)\cdot m}{2} : m$, te je prema uvjetu zadatka $\frac{(2n+m+1)\cdot m}{2m}=12.5$.

Dalje imamo redom: $2n+m+1=25$, $2n+2n+1=25$, $4n=24$, tj. $n=6$. To znači da je prvi traženi prirodni broj $n+1=6+1=7$, a zbog $m=2n$ slijedi da je $m=12$.

Dakle, u traženom nizu ima 12 uzastopnih prirodnih brojeva. Oni su redom: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

.... UKUPNO 10 BODOVA

3.



Neka je t traženo vrijeme, izraženo u satima. Za t sati prvi će biciklist od križanja O biti udaljen $x=|10-30t|$ kilometara, a drugi $y=|30-40t|$ kilometara.

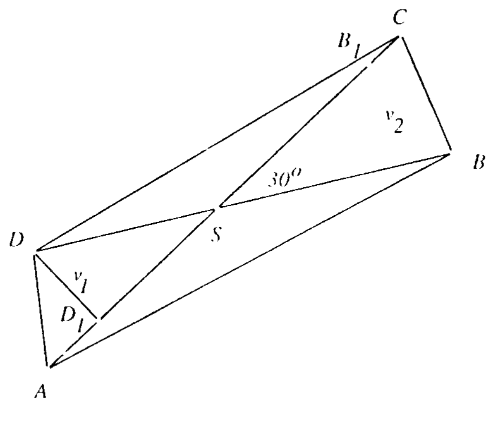
Neka je d međusobna udaljenost biciklista. Prema uvjetu zadatka, nakon t sati ona će biti najmanja moguća. Primjenom Pitagorina poučka imamo da je $d^2=x^2+y^2$, odnosno $d^2=(10-30t)^2+(30-40t)^2$. Kvadriranjem dobivamo $d^2=100-600t+900t^2+900-2400t+1600t^2$, što možemo zapisati u obliku $d^2=2500t^2-3000t+900+100$, odnosno kao $d^2=(50t-30)^2+100$.

Kako je $(50t-30)^2 \geq 0$, zaključujemo da će desna strana jednakosti biti najmanja moguća ukoliko je $50t-30=0$, odnosno $t=\frac{3}{5}$ sata. Tada je $d^2=100$, tj. $d=10$ km.

Prema tome, biciklisti će biti najmanje udaljeni jedan od drugoga nakon $\frac{3}{5}$ sata, odnosno 36 minuta. Tada će biti udaljeni 10 km jedan od drugoga.

.... UKUPNO 10 BODOVA

4.



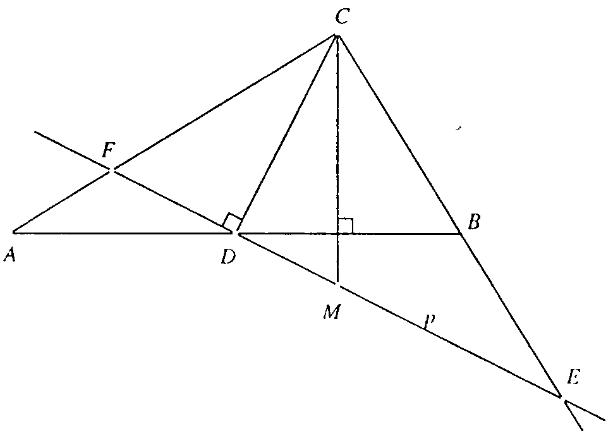
Neka je u četverokutu $ABCD$ točka S sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ i neka je $\sphericalangle BSC = \sphericalangle ASD = 30^\circ$. Označimo s v_1 duljinu visine $\overline{DD_1}$ iz vrha D na stranicu $\overline{AC}$ trokuta ACD, a s v_2 duljinu visine $\overline{BB_1}$ iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ trokuta ABC. Budući da je trokut DSD_1 polovica jednakostraničnog trokuta, imamo $v_1 = \frac{1}{2}|SD|$. Nadalje, kako je trokut BSB_1 također polovica jednakostraničnog trokuta, vrijedi i $v_2 = \frac{1}{2}|BS|$. Sada za površinu četverokuta $ABCD$ imamo redom:

$$P(ABCD) = P(ACD) + P(ABC) = \frac{|AC| \cdot v_1}{2} + \frac{|AC| \cdot v_2}{2} = \frac{|AC|}{2}(v_1 + v_2)$$

$$= \frac{|AC|}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}|DS| + \frac{1}{2}|BS|\right) = \frac{1}{4}|AC| \cdot (|BS| + |SD|) = \frac{1}{4}|AC| \cdot |BD| \ .$$

.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



Neka je $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $|AC| > |BC|$, i neka je točka M presjek okomice iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$ i dužine $\overline{EF}$. Kako je središte opisane kružnice svakog pravokutnog trokuta polovište njegove hipotenuze, slijedi da je točka D središte opisane kružnice pravokutnog trokuta ABC. To znači da je $|DA| = |DC|$. Dakle, trokut ADC je jednakokračan, pa je $\sphericalangle DCA = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CAB = \alpha$. Nadalje, $\sphericalangle CEM = \sphericalangle CED = \sphericalangle DCA = \alpha$, jer su to šiljasti kutovi s okomitim kracima. Na isti je način i $\sphericalangle MCB = \sphericalangle BAC = \alpha$, jer su to opet šiljasti kutovi s okomitim kracima. Dakle, imamo da je $\sphericalangle CEM = \sphericalangle MCB = \sphericalangle MCE = \alpha$, iz čega slijedi da je trokut MEC jednakokračan, pa je $|MC| = |ME|$.
Dalje je $\sphericalangle MCF = \sphericalangle MCA = \sphericalangle ABC = \beta$, jer su to opet šiljasti kutovi s okomitim kracima. Budući da je $\sphericalangle CMF$ vanjski kut trokuta MEC, slijedi da je $\sphericalangle CMF = 2\alpha$.
Za trokut MCF vrijedi jednakost $\sphericalangle MFC + \sphericalangle MCF + \sphericalangle CMF = 180^\circ$, tj. $\sphericalangle MFC + \beta + 2\alpha = 180^\circ$. Zbog $\alpha + \beta = 90^\circ$ imamo da je $\sphericalangle MFC + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$. Odavde je $\sphericalangle MFC = 90^\circ - \alpha$, tj. $\sphericalangle MFC = \beta$.
Sada je jasno da je trokut MCF jednakokračan, a to znači da je $|MC| = |MF|$. Iz toga slijedi da je $|MF| = |MC| = |ME|$, pa zaključujemo da je točka M polovište dužine $\overline{EF}$.
.... UKUPNO 10 BODOVA