

MATEMATIKA

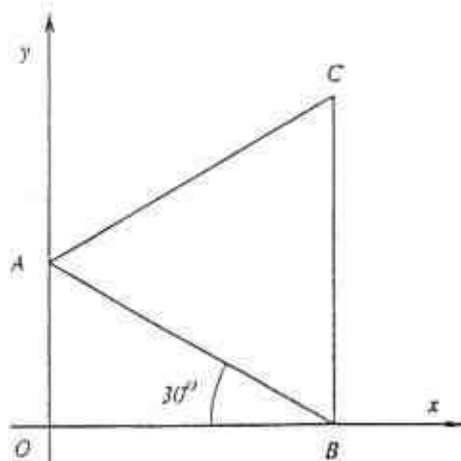
Zadaci za općinsko - gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
2. ožujka 2001. godine

8. razred

1. Odredi vrijednost razlomka $\frac{3y^2 - 2xy + x^2}{x^2 + xy + y^2}$ ako je $\frac{y}{x} = 3$.
2. Izračunaj vrijednost izraza

$$\frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{7}{2\sqrt{2} + 1} - (11 - 5\sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$$

3. Ostatak pri dijeljenju cijelog broja a sa 4 je 3. Koliki je ostatak pri dijeljenju broja $a^2 - a$ sa 4?
4. U pravokutnom koordinatnom sustavu nacrtan je jednakokranični trokut ABC , kao na slici, kome je $|AB| = a$. Odredi koordinate vrhova A , B i C tog trokuta.



5. U danu kružnicu upisan je četverokut $ABCD$ kome se dijagonale sijeku u točki M pod pravim kutom. Točkom M nacrtan je pravac p okomit na stranicu $\overline{AB}$. Dokaži da pravac p raspolavlja stranicu $\overline{CD}$.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Iz $\frac{y}{x} = 3$ slijedi da je $y = 3x$, 1 bod

pa supstitucijom u zadani razlomak dobivamo

$$\frac{3y^2 - 2xy + x^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{3 \cdot (3x)^2 - 2x \cdot 3x + x^2}{x^2 + x \cdot 3x + (3x)^2} = \frac{3 \cdot 9x^2 - 6x^2 + x^2}{x^2 + 3x^2 + 9x^2} = \frac{22x^2}{13x^2}$$

2 BODA ZA BROJNIK, 2 BODA ZA

NAZIVNIK

$$= \frac{27x^2 - 6x^2 + x^2}{13x^2} = \frac{22x^2}{13x^2}$$

2 BODA ZA BROJNIK, 1 BOD ZA NAZIVNIK

$$= \frac{22}{13}$$

2 boda

UKUPNO 10 BODOVA

2. Racionalizacijom nazivnika prvog i drugog razlomka u zadanom izrazu dobijemo

$$\frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \sqrt{5} - 2\sqrt{2},$$

3 boda

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + 1} = 2\sqrt{2} - 1,$$

2 boda

dok je umnožak izraza u zagradama jednak $-(11 - 5\sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5}$. 3 boda

Konačno, vrijednost zadaniog izraza jednaka je $\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1 + 3 - \sqrt{5} = 2$. 2 boda

UKUPNO 10 BODOVA

3. Iz uvjeta zadatka slijedi da je $a = 4k + 3$, pri čemu je k cijeli broj. 1 bod

Supstituiramo li to u zadani izraz, dobivamo redom:

$$a^2 - a = (4k + 3)^2 - (4k + 3) = 16k^2 + 24k + 9 - 4k - 3$$

2 boda

$$= 16k^2 + 20k + 6 = 16k^2 + 20k + 4 + 2$$

3 boda

$$= 4(4k^2 + 5k + 1) + 2$$

1 bod

$$= 4n + 2,$$

2 boda

gdje je $n = 4k^2 + 5k + 1$ cijeli broj. Dakle, ostatak pri dijeljenju broja $a^2 - a$ sa 4 je 2. 1 bod

UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je točka O sjecište koordinatnih osi. Trokut AOB je pravokutan, a jedan mu je kut jednak 30° .

Prema tome, on je polovica jednakostraničnog trokuta kome je dužina $\overline{AB}$ osnovica. 1 bod

Zato je $|AO| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}a$, 2 boda

pa točka A ima koordinate $A(0, \frac{a}{2})$. 1 bod

Također, kateta $\overline{OB}$ visina je jednakostraničnog trokuta s osnovicom $\overline{AB}$, 2 boda

$$\text{te je } |OB| = \frac{|AB| \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

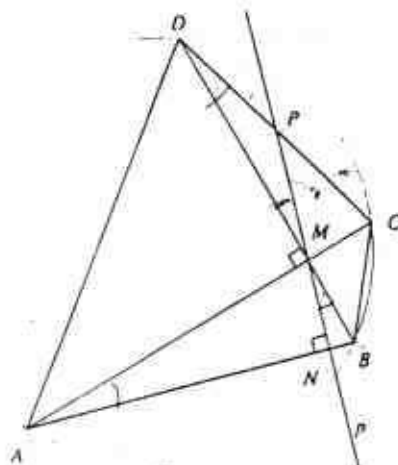
2 boda

Zbog toga točka B ima koordinate $B(\frac{a}{2}\sqrt{3}, 0)$. 1 bod

Budući da je $\angle OBA = 30^\circ$ a $\angle ABC = 60^\circ$, nužno slijedi da je $\angle OBC = 90^\circ$. 1 bod

Zato je $C(\frac{a}{2}\sqrt{3}, a)$. 1 bod

UKUPNO 10 BODOVA



Neka su točke N i P presjeci pravca p i stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom. Kutovi $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle BDC$ obodni su kutovi nad tetivom $\overline{BC}$ pa je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$. Također, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BMN$ jer su to šiljasti kutovi s okomitim kracima. Prema tome, $\sphericalangle BMN = \sphericalangle BDC$. Nadalje, $\sphericalangle BMN = \sphericalangle DMP$ (vršni kutovi) pa zaključujemo da je $\sphericalangle BDC = \sphericalangle MDP = \sphericalangle DMP$, što znači da je $\triangle DMP$ jednakokrani. Stoga je $|PD| = |PM|$. 4 boda

Slično zaključujemo i u slučaju tetive $\overline{AD}$: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{AD}$) i $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AMN$ (šiljasti kutovi s okomitim kracima), te je $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ACD$. Zbog $\sphericalangle AMN = \sphericalangle CMP$ (vršni kutovi) imamo i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle MPC = \sphericalangle CMP$, pa je $\triangle CMP$ jednakokrani trokut i $|PM| = |PC|$. 4 boda

Zajedno je $|PD| = |PM| = |PC|$, te je točka P polovište stranice $\overline{CD}$. 1 bod

UKUPNO 10 BODOVA