MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
6. travnja 2001. godine

5. razred

1. Svijeća visine 12 cm jednoliko gori i cijela izgori za dva sata. Za koliko će minuta, od trenutka kada je zapaljena, svijeća biti visoka točno 7 cm?

2. Na koliko se načina na naznačena mjesta u nizu

   $$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

   mogu rasporediti četiri nule i četiri jedinice, ako jedinice ne smiju biti jedna pored druge? Napiši sve takve rasporede. Odgovor obrazloži!

3. Zadana su dva prirodna broja, takvi da je njihov zbroj 6641, a znamenka jedinica prvog broja jednaka je 0. Izostavi li se prvom broju znamenka jedinica, a drugi broj ostane nepromijenjen, zbroj tako dobivenih brojeva je 2411. Odredi zadane brojeve.

4. Odredi sve brojeve oblika $\overline{6ab}$ koji pri dijeljenju s 11 daju ostatak 7, a pri dijeljenju s 5 ostatak 1. Odgovor obrazloži!

5. Dan je pravokutnik $ABCD$, čija je stranica $\overline{AB}$ dva puta dulja od stranice $\overline{AD}$. Povećamo li duljinu stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ tog pravokutnika za isti prirodni broj, izražen u centimetrima, dobit ćemo stranice pravokutnika čiji je opseg za 24 cm veći od opsega pravokutnika $ABCD$, a površina za 540 cm^2 veća od površine pravokutnika $ABCD$. Kolike su duljine stranica pravokutnika $ABCD$?

ŽU 2001.

RJEŠENJA ZA 5. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prema uvjetima zadatka, za potpuno izgaranje svijeće visine 12 cm potrebno je 120 minuta. 1 BOD
Budući da gori jednoliko, za izgaranje 1 cm svijeće potrebno je 12 puta kraće vrijeme. 2 BODA
Dakle, 1 cm svijeće izgorjet će za $120 : 12 = 10$ minuta. 2 BODA
Da bi visina svijeće bila točno 7 cm, treba izgorjeti $12 - 7 = 5$ cm od njene početne visine. 2 BODA
Konačno, 5 cm svijeće izgorjet će za $5 \cdot 10 = 50$ minuta. 2 BODA
Prema tome, svijeća će biti visoka 7 cm točno 50 minuta nakon što je zapaljena. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Mjesta u nizu brojat ćemo s lijeva na desno. Prema uvjetima zadatka, iza svake jedinice u nizu, osim iza one koja se nalazi na 8. mjestu, mora se nalaziti nula. Dakle, neposredno iza svake od prve tri jedinice u nizu mora slijediti nula. 1 BOD
To znači da se u svim nizovima s traženim svojstvom tri puta pojavljuje grupa _1_ _0_, a jednom _1_ samostalno (ne nužno s jedinicom iza sebe). Pri tome se samostalna _1_ u nizu smije nalaziti tek iza tri puta ponovljene grupe _1_ _0_. 2 BODA
Time smo obuhvatili sve četiri jedinice koje se pojavljuju u nizu, a i tri nule. Ostalo je još rasporediti jednu nulu. Ona se u nizu može nalaziti ili ispred prve grupe _1_ _0_, ili između prve i druge takve grupe, ili između druge i treće takve grupe, ili između treće takve grupe i samostalne _1_, ili iza samostalne _1_. 2 BODA

Dakle, imamo 5 različitih nizova:

0 1 0 1 0 1 0 1	1 BOD
1 0 0 1 0 1 0 1	1 BOD
1 0 1 0 0 1 0 1	1 BOD
1 0 1 0 1 0 0 1	1 BOD
1 0 1 0 1 0 1 0 .	1 BOD

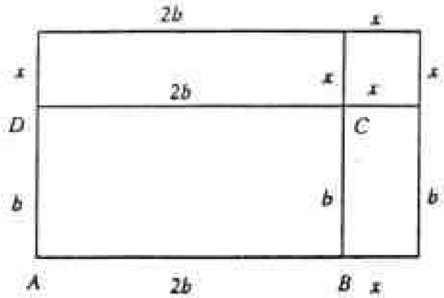
NAPOMENA: Ispisani svi nizovi, bez objašnjenja, nose samo 5 bodova (po 1 bod za svaki niz).
.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Izbrišemo li prvom zadanom broju znamenku jedinica, tj. nulu, dobit ćemo broj koji je od njega 10 puta manji. 2 BODA
Označimo taj dobiveni broj sa x, a drugi zadani broj sa y. Prema tome, prvi zadani broj 10 je puta veći od x, tj. jednak je $10x$. 1 BOD
Zato je zbroj dva zadana broja jednak $6641 = 10x + y = 9x + x + y$. 2 BODA
Prema uvjetima zadatka, novi zbroj je $2411 = x + y$. 1 BOD
Dakle, razlika novog i starog zbroja je $6641 - 2411 = 9x$, tj. $9x = 4230$. 1 BOD
Odavde je $x = 4230 : 9$, tj. $x = 470$, te je prvi zadani broj jednak $10x = 10 \cdot 470$, tj. on je 4700. 2 BODA
Sada je drugi zadani broj lako odrediti kao $6641 - 4700$, tj. on je 1941. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Neposredni prethodnik broja $\overline{6ab}$, tj. broj $\overline{6ab} - 1$, djeljiv je s 5. To znači da mu je znamenka jedinica 0 ili 5. Znamenka jedinica traženog broja od nje je za 1 veća. Zato je $b = 1$ ili $b = 6$. 2 BODA
Prema tome, tražimo brojeve oblika $\overline{6a1}$ ili $\overline{6a6}$, koji pri dijeljenju s 11 daju ostatak 7. 1 BOD
Za svaki od ova dva slučaja treba provjeriti 10 mogućnosti, stavljajući za a redom $0, 1, \ldots, 9$. 1 BOD
Dakle, provjeravamo koji od brojeva $601, 611, 621, \ldots, 691$, odnosno $606, 616, 626, \ldots, 696$ pri dijeljenju s 11 daju ostatak 7. Provjeru je moguće izvršiti na razne načine. 4 BODA (po 2 boda za provjeru svakog niza)
Tako dobijemo da su $601 = 11 \cdot 54 + 7$ i $656 = 11 \cdot 59 + 7$ jedini od navedenih brojeva koji imaju traženo svojstvo. 2 BODA (po 1 bod za svako rješenje)
NAPOMENA: Pogođena rješenja, bez obrazloženja postupka, nose samo 2 boda.
.... UKUPNO 10 BODOVA

M5 ŽN 2001.

5. Neka je $|AD| = b$, a s x označimo (prirodni) broj centimetara za koji smo produljili stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ pravokutnika $ABCD$. Prema tome je $|AB| = 2b$, a opsegu pravokutnika $ABCD$ 4 smo puta dodali x cm.



Slika 2 BODA

Zato je opseg novog pravokutnika za $4x$ cm veći od opsega pravokutnika $ABCD$. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka slijedi da je $4x = 24$, tj. $x = 6$. 1 BOD

Iz slike zaključujemo da se površina novog pravokutnika u odnosu na površinu pravokutnika $ABCD$ uvećala za površinu pravokutnika sa stranicama duljina x i $2b$, tj. za $x \cdot 2b = 6 \cdot 2b = 12b$, površinu pravokutnika sa stranicama duljina x i b, tj. za $x \cdot b = 6b$, te za površinu kvadrata sa stranicom duljine x, tj. za $x \cdot x = 6 \cdot 6 = 36\ \text{cm}^2$. 2 BODA

Prema uvjetima zadatka zato vrijedi jednadžba $12b + 6b + 36 = 540$, ili dalje redom $18b = 540 - 36$, $18b = 504$, $b = 504 : 18$, $b = 28$ cm. 2 BODA

Odavde slijedi da su duljine stranica pravokutnika $ABCD$ jednake 28 cm i 56 cm. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA