MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
6. travnja 2001. godine

6. razred

1. Kojih devet uzastopnih cijelih brojeva ima svojstvo da je zbroj prva tri, počevši od najmanjeg, jednak zbroju preostalih šest od tih brojeva?

2. Koliko ima troznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki jednak nuli? Odgovor obrazloži!

3. Igor i Mario nalazili su se na ravnoj cesti, međusobno udaljeni, i istovremeno biciklima krenuli jedan prema drugome. U svakoj sekundi vožnje Igor prijeđe put od 6 metara, a Mario od 8 metara. Točno 30 sekundi od početka vožnje Igor i Mario bili su međusobno udaljeni jednako kao i 40 sekundi od početka vožnje. Koliko su metara Igor i Mario bili međusobno udaljeni na početku vožnje?

4. Dan je kvadrat $ABCD$ i unutar njega odabrana točka P tako da je trokut BCP jednakostraničan. Pravac AP siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki E. Koliki je kut $\sphericalangle CPE$?

5. U ravnini su istaknute dvije različite točke A i B. Koliko ima točaka C u toj ravnini, takvih da su A, B i C vrhovi jednakokračnog pravokutnog trokuta. Svaki mogući slučaj nacrtaj i obrazloži.

II ŽN 2001

RJEŠENJA ZA 6. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x najmanji od 9 uzastopnih cijelih brojeva. Tada su traženi brojevi redom: x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$, $x+6$, $x+7$, $x+8$. 2 BODA

Prema uvjetima zadatka, vrijedi jednadžba:

$x+x+1+x+2=x+3+x+4+x+5+x+6+x+7+x+8$, 3 BODA

ili dalje redom $3x+3=6x+33$, $6x-3x=3-33$, $3x=-30$, $x=-10$. 3 BODA

Traženi cijeli brojevi su: -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Umnožak znamenaka nekog troznamenkastog broja jednak je nuli ukoliko su mu ili znamenka desetica ili znamenka jedinica ili njih obje jednake nuli. 2 BODA

Zadatak ćemo riješiti tako da od broja svih troznamenkastih brojeva oduzmemo broj troznamenkastih brojeva kojima niti jedna znamenka nije jednaka nuli. 2 BODA

Odredimo najprije ukupan broj troznamenkastih brojeva. Znamenku stotica možemo izabrati na 9 načina (bilo koja od znamenaka 1,2, ... ,9). Za svaku već izabranu znamenku stotica, znamenku desetica možemo izabrati na 10 načina (bilo koja od znamenaka 0,1,2, ... ,9). Slično, i znamenku jedinica možemo izabrati na 10 načina. Prema tome, svih troznamenkastih brojeva ima $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. 2 BODA

Sada odredimo koliko ima troznamenkastih brojeva kojima niti jedna znamenka nije nula. Znamenku stotica možemo izabrati na 9 načina (bilo koja od znamenaka 1,2, ... ,9). Za svaku već izabranu znamenku stotica, znamenku desetica možemo izabrati na 9 načina (bilo koja od znamenaka 1,2, ... ,9). Slično, i znamenku jedinica možemo izabrati na 9 načina. Prema tome, svih troznamenkastih brojeva kojima niti jedna znamenka nije nula ima $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. 2 BODA

Konačno, traženih brojeva ima $900 - 729$, tj. 171. 2 BODA

NAPOMENA: Pogođeno rješenje, bez obrazloženja, nosi samo 2 boda.

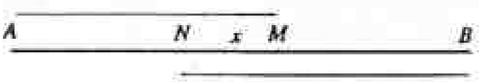
.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Pretpostavimo da se prije početka vožnje Igor nalazio u točki A, a Mario u točki B. Od početka vožnje pa do njihovog susreta Igor i Mario jedan su se drugome približavali. Neka njihova međusobna udaljenost nakon 30 sekundi vožnje iznosi x metara. Nakon susreta, Igor i Mario počeli su se međusobno udaljavati. Točno 40 sekundi nakon početka vožnje, što je bilo nakon susreta, oni su opet bili međusobno udaljeni x metara. 2 BODA

Označimo sa C točku u kojoj se nalazio Igor, a sa D točku u kojoj se nalazio Mario 30 sekundi nakon početka vožnje.

Tada je $|CD| = x$. Do tog trenutka Igor je prešao $|AC| = 30 \cdot 6 = 180$ metara, a Mario $|BD| = 30 \cdot 8 = 240$ metara. Prema tome, njihova početna udaljenost bila je $|AB| = |AC| + |CD| + |BD| = 180 + x + 240 = 420 + x$ metara. 2 BODA

Neka je M točka u kojoj se nalazio Igor, a N u kojoj Mario 40 sekundi nakon početka vožnje.



Tada je njihova udaljenost opet jednaka $|MN| = x$ metara. No, do tog trenutka Igor je prešao $|AM| = 40 \cdot 6 = 240$ metara, a Mario $|BN| = 40 \cdot 8 = 320$ metara. Vrijedi i $|AB| = |AM| + (|BN| - |MN|) = 240 + (320 - x) = 560 - x$ metara. 2 BODA

Dakle, vrijedi jednadžba $420 + x = 560 - x$. 2 BODA

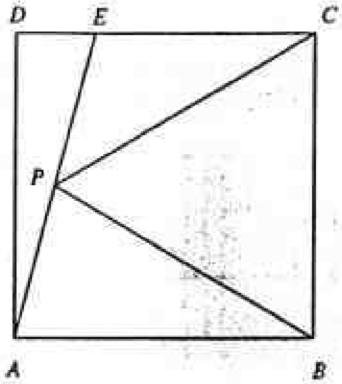
Njeno je rješenje $x = 70$. 1 BOD

Prema tome, Igor i Mario na početku su vožnje bili udaljeni $180 + 70 + 240$, tj. 490 metara. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

M6 Žu 2001. A.H.

4. Skica 1 BOD



Budući da je $|AB| = |BC| = |BP|$, zaključujemo da je trokut ABP jednakokračan. To znači da je $\sphericalangle PAB = \sphericalangle APB$. 2 BODA

Nadalje, iz $\sphericalangle PBC = 60°$, $\sphericalangle ABC = 90°$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABP + \sphericalangle PBC$, slijedi da je $\sphericalangle ABP + 60° = 90°$, tj. $\sphericalangle ABP = 30°$. 1 BOD

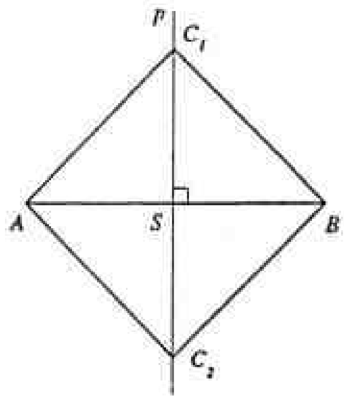
Odavde imamo: $2\sphericalangle APB = \sphericalangle APB + \sphericalangle BAP = 180° - \sphericalangle ABP = 180° - 30° = 150°$, tj. $\sphericalangle APB = 75°$. 3 BODA

Konačno, iz očite jednakosti $\sphericalangle CPE + \sphericalangle CPB + \sphericalangle APB = 180°$, te zbog $\sphericalangle CPB = 60°$, dobivamo redom $\sphericalangle CPE = 180° - 60° - 75° = 45°$. 3 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Dužina $\overline{AB}$ može biti hipotenuza ili jedna od kateta jednakokračnog pravokutnog trokuta. Prema tome, razlikujemo tri slučaja.

(a) Neka je pravac p simetrala, a točka S polovište dužine $\overline{AB}$. Na pravcu p uvijek možemoodabrati dvije točke, C_1 i C_2, simetrične jednu drugoj s obzirom na pravac AB, tako da je $|C_1S| = |AS| = |BS| = |C_2S|$.

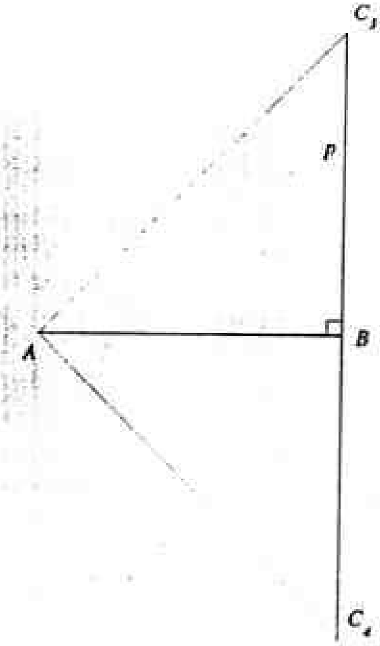


Slika 2 BODA

Budući da su ASC_1 i BSC_1 dva jednakokračna pravokutna trokuta, slijedi da je $\sphericalangle C_1AS = 45°$ i $\sphericalangle C_1BS = \sphericalangle 45°$, što znači da je $\sphericalangle AC_1B = 90°$. Prema poučku o simetrali dužine još je $|C_1A| = |C_1B|$, pa zaključujemo da je trokut ABC_1 jednakokračan i pravokutan. Kako je trokut ABC_2 simetričan trokutu ABC_1 s obzirom na pravac AB, i on ima traženo svojstvo. Prema tome, C_1 i C_2 dvije su tražene točke. 2 BODA

(b) Na dužini $\overline{AB}$ u točki B nacrtamo pravac $p \perp AB$. Na pravcu p uvijek možemo odrediti dvije točke, C_3 i C_4, tako da je $|C_3B| = |AB| = |C_4B|$.

MG ŽN 2001.

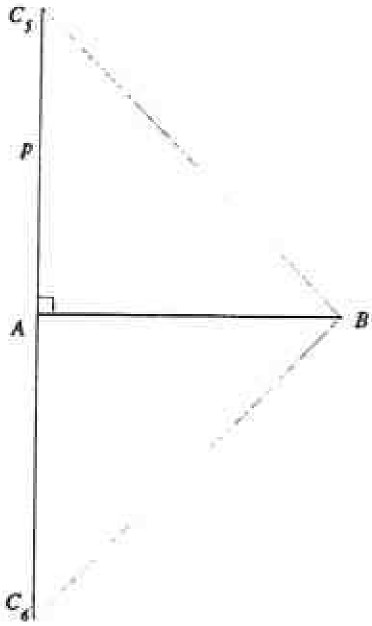


Slika

2 BODA

Tada su ABC_3 i ABC_4 jednakokračni pravokutni trokuti, a C_3 i C_4 dvije tražene točke. 1 BOD

(c) Na dužini $\overline{AB}$ u točki A nacrtamo pravac $p \perp AB$. Na pravcu p uvijek možemo odrediti dvije točke, C_5 i C_6, tako da je $|C_5A| = |AB| = |C_6A|$.



Slika 1 BOD

Tada su ABC_5 i ABC_6 jednakokračni pravokutni trokuti, a C_5 i C_6 dvije tražene točke. 1 BOD

Time smo iscrpili sve mogućnosti. Dakle, postoji 6 točaka s traženim svojstvom. 1 BOD

NAPOMENA: Slike, bez objašnjenja, nose samo 5 bodova.

.... UKUPNO 10 BODOVA