MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
6. travnja 2001. godine

8. razred

1. Dani su realni brojevi x i y, takvi da je $x \neq y$. Za koju vrijednost realnog broja a vrijedi jednakost

$$\frac{x^2-8}{y-x}+\frac{a}{x-y}=\frac{(x+3)(x-5)}{y-x} \quad ?$$

2. Odredi sve proste brojeve p za koje je broj $5p+1$ kvadrat nekog prirodnog broja. Odgovor obrazloži!

3. Na promociji novih proizvoda neke tvrtke uzvanicima su podijeljeni džepni kalendari za 2001. godinu. Svaki je uzvanik dobio jednaki broj kalendara. Da je promociji prisustvovalo 5 uzvanika manje, svaki od njih dobio bi 2 kalendara više, a da je promociji prisustvovalo 4 uzvanika više, svaki od njih dobio bi po 1 kalendar manje. Koliko je uzvanika prisustvovalo promociji? Koliko je kalendara dobio svaki uzvanik?

4. Dan je pravokutni trokut ABC, s pravim kutom pri vrhu C i hipotenuzom duljine $c = 16$ cm. Kolika je duljina visine iz vrha C tog trokuta, ako je duljina njegove težišnice iz vrha C jednaka $\sqrt{ab}$, pri čemu su a i b duljine kateta trokuta ABC?

5. Dan je trokut ABC sa svojstvom da je $\measuredangle CAB = 2\measuredangle ABC$. Ako su $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$ duljine stranica trokuta ABC, dokaži da vrijedi jednakost

$$a^2 = b(b+c) \quad .$$

ŽUP 2001

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

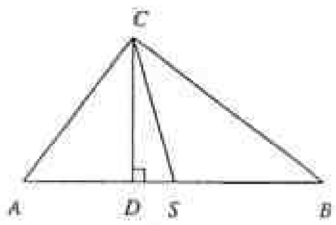
OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Danu jednakost možemo pisati u obliku $\frac{x^2-8}{y-x} - \frac{a}{y-x} = \frac{(x+3)(x-5)}{y-x}$, 1 BOD
odnosno $\frac{x^2-8-a}{y-x} = \frac{(x+3)(x-5)}{y-x}$. 1 BOD
Budući da su lijeva i desna strana zadnje napisane jednakosti razlomci s jednakim nazivnicima, slijedi da su i brojnici tih razlomaka jednaki, tj. vrijedi $x^2 - 8 - a = (x+3)(x-5)$. 4 BODA
Dalje vrijede redom ove jednakosti: $x^2 - 8 - a = x^2 - 5x + 3x - 15$, 1 BOD
$-8 - a = -2x - 15$, 1 BOD
$-a = -2x - 15 + 8$, $-a = -2x - 7$, 1 BOD
tj. $a = 2x + 7$. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Uvjet zadatka možemo zapisati u obliku $5p + 1 = n^2$, odnosno $5p = n^2 - 1$, pri čemu pretpostavljamo da je n prirodni broj. 1 BOD
Rastavimo li desnu stranu zadnje jednakosti na faktore, dobivamo $5p = (n-1)(n+1)$. 1 BOD
Kako je lijeva strana ove jednakosti pozitivna, takva je nužno i desna strana. Prema tome, faktori $n-1$ i $n+1$ su ili oba pozitivna ili oba negativna. 1 BOD
Odmah vidimo da je slučaj $n - 1 < 0$, $n + 1 < 0$ nemoguć, jer je tada $n < -1$ (druga nejednakost), što je u suprotnosti s pretpostavkom da je n prirodni broj. 1 BOD
Kada je $n - 1 > 0$, $n + 1 > 0$, moguća su 4 slučaja:
$$\begin{cases} n-1 = 1 \\ n+1 = 5p \end{cases} \text{ ili } \begin{cases} n-1 = 5p \\ n+1 = 1 \end{cases} \text{ ili } \begin{cases} n-1 = 5 \\ n+1 = p \end{cases} \text{ ili } \begin{cases} n-1 = p \\ n+1 = 5. \end{cases}$$ 2 BODA
U svakom od ova 4 sustava lako odredimo n. U prvom je sustavu $n = 2$, no ne postoji prosti broj p takav da je $5p = 3$. 1 BOD
U drugom je sustavu $n = 0$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je n prirodni broj. 1 BOD
Iz trećeg sustava čitamo $n = 6$, odakle je $p = 7$, i to je jedno traženo rješenje. 1 BOD
Konačno, četvrti sustav daje $n = 4$, te $p = 3$, što je drugo traženo rješenje. 1 BOD
Očito, $p = 3$ i $p = 7$ jedina su rješenja zadatka.
NAPOMENA: Pogođena rješenja, bez objašnjenja, nose samo 4 boda (po 2 boda za svako rješenje).
.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je x broj uzvanika na promociji, a n broj kalendara koje je dobio svaki uzvanik. Ukupni broj kalendara namijenjenih uzvanicima tada je nx. 1 BOD
Da je na promociji bilo 5 uzvanika manje, tj. $x - 5$ uzvanika, svaki od njih dobio bi 2 kalendara više, tj. $n + 2$ kalendara. Prema tome, u tom je slučaju podijeljeno $(n+2)(x-5)$ kalendara. 1 BOD
Kako je na raspolaganju ostao isti ukupni broj kalendara, vrijedi jednakost $nx = (n+2)(x-5)$, tj. nakon sređivanja, $2x - 5n = 10$. 2 BODA
Da je promociji prisustvovalo 4 uzvanika više, bilo bi ih $x + 4$. U tom bi slučaju svaki od njih dobio 1 kalendar manje, tj. $n - 1$ kalendar, a bilo bi podijeljeno ukupno $(n-1)(x+4)$ kalendara. 1 BOD
Analogno kao u prethodnom slučaju, vrijedi $nx = (n-1)(x+4)$, tj. $x - 4n = -4$. 2 BODA
Dakle, dobili smo sustav jednadžbi $\begin{cases} 2x - 5n = 10 \\ x - 4n = -4. \end{cases}$ 1 BOD
Njegovo je rješenje $n = 6$, $x = 20$. 2 BODA
Prema tome, na promociji je bilo 20 uzvanika, a svaki od njih dobio je 6 kalendara.
.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka su $|BC| = a$ i $|AC| = b$ duljine kateta, $|AB| = c$ duljina hipotenuze, točka S polovište hipotenuze $\overline{AB}$, a točka D nožište visine iz vrha C pravokutnog trokuta ABC.



Slika 1 BOD
Neka je v_c duljina tražene visine, tj. $v_c = |CD|$. Težišnica iz vrha C trokuta ABC tada je dužina $\overline{SC}$, a vrijedi i $|SA| = |SB| = \frac{c}{2}$. 1 BOD

MX ŽR 2001 AH

Budući da je trokut ABC pravokutan, točka S je središte njemu opisane kružnice. Zato je ona jednako udaljena od sva tri vrha trokuta, tj. $|SC| = |SA| = |SB| = \frac{c}{2}$. 2 BODA

Po pretpostavci je $|SC| = \sqrt{ab}$, pa je $\sqrt{ab} = \frac{c}{2}$, odnosno, nakon kvadriranja, $ab = \frac{c^2}{4}$. 1 BOD

Izrazimo površinu pravokutnog trokuta ABC na dva načina: $P = \frac{ab}{2} = \frac{cv_c}{2}$. 2 BODA

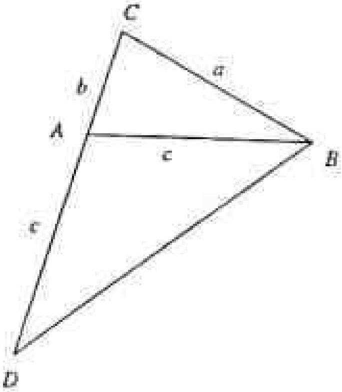
Odavde je $cv_c = ab$, tj. $cv_c = \frac{c^2}{4}$, 1 BOD

i dalje redom $4cv_c = c^2$, $4v_c = c$, te $v_c = \frac{c}{4}$. 1 BOD

Kako je $c = 16$ cm, tražena duljina visine je $v_c = \frac{16}{4}$, tj. $v_c = 4$ cm. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Napišemo li traženu jednakost u obliku razmjera $a : b = (b+c) : a$, uočavamo da zadatak možemo riješiti nadopunjavanjem trokuta ABC do njemu sličnog trokuta čija je jedna stranica duljine $b+c$, a druga duljine a. 1 BOD



Neka je $\sphericalangle ABC = \beta$. Prema uvjetu zadatka, tada je $\sphericalangle CAB = 2\beta$. Na produžetku stranice $\overline{AC}$ preko vrha A odaberimo točku D tako da je $|AD| = |AB| = c$. To znači da je trokut DBA jednakokračan pa je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB$ (kutovi uz osnovicu). 2 BODA

Kut $\sphericalangle CAB$ je vanjski kut trokuta DBA, pa vrijedi niz jednakosti: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ABD = 2\sphericalangle ABD$, tj. $2\beta = 2\sphericalangle ABD$, odakle je $\sphericalangle ABD = \beta$. Prema tome, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB = \beta$. 2 BODA

Sada je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DBA + \sphericalangle ABC = \beta + \beta = 2\beta$, odnosno $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CAB = 2\beta$. 1 BOD

Odavde slijedi da su trokuti ABC i BDC slični. Zaista, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBC$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADB = \sphericalangle CDB$, a kut $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCB$ je zajednički. 2 BODA

Iz dokazane sličnosti trokuta slijedi da su duljine odgovarajućih stranica razmjerne. Zato vrijedi razmjer $a : b = (b+c) : a$, te je $a^2 = b(b+c)$, što je i trebalo dokazati. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA