MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

2. ožujka 2001.

I. razred

1. Između znamenki 4 i 9 broja 49 umetnuto je nekoliko četvorki, a iza njih isto toliko osmica. Dokažite da je tako dobiveni broj potpuni kvadrat.

2. Na koliko načina možemo izabrati dva različita broja iz skupa $\{1, 2, 3, ..., 2001\}$ tako da njihov zbroj bude paran?

3. Iz polovišta svake stranice šiljastokutnog trokuta spuštene su okomice na ostale dvije stranice. Dokažite da je površina šesterokuta omeđenog tim okomicama jednaka polovini površine trokuta.

4. Ako su x, y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$, dokažite da je vrijednost izraza

$$\frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{y+1}{yz+y+1} + \frac{z+1}{zx+z+1}$$

konstantna.

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.* Promotrimo najprije nekoliko prvih brojeva:

$$\begin{aligned} 49 &= 7^2 \\ 4489 &= 67^2 \\ 444889 &= 667^2 \end{aligned}$$

Pokazat ćemo da je

$$\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 = \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2. \qquad \text{10 bodova}$$

Ovo je ekvivalentno s

$$\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n} = \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2 - 1, \qquad (*)$$

odnosno

$$\underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2 - 1 = \underbrace{66\ldots6}_{n-1}8 \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n}. \qquad \text{5 bodova}$$

Kako je

$$\underbrace{66\ldots6}_{n-1}8 \cdot 6 = 4\underbrace{00\ldots0}_{n-1}8,$$

potpisivanjem i zbrajanjem dobivamo $\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n}$, tj. $(*)$ 10 bodova

Drugo rješenje. Dobiveni broj je oblika $\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9$.

Neka je

$$x = \underbrace{11...1}_{n} = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{99...9}_{n} = \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1)$$

$$\Longrightarrow 10^n = 9x + 1. \qquad \text{5 bodova}$$

Sada je

$$\begin{aligned} \underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9 &= \underbrace{44...4}_{n} \cdot 10^n + \underbrace{88...8}_{n} + 1 \\ &= 4x \cdot 10^n + 8x + 1 \\ &= 4x(9x+1) + 8x + 1 \\ &= 36x^2 + 12x + 1 = (6x+1)^2. \qquad \text{20 bodova} \end{aligned}$$

2. Zbroj dva broja iz danog skupa je paran ako i samo ako su oba parna ili oba neparna. 5 bodova

U danom skupu ima 1000 parnih brojeva, pa među njima možemo izabrati $\frac{1000 \cdot 999}{2} = 499\,500$ traženih parova. 8 bodova

Isto tako, ima 1001 neparnih brojeva, a među njima je $\frac{1001 \cdot 1000}{2} = 500\,500$ traženih parova. 8 bodova

Dakle, broj svih parova je $499\,500 + 500\,500 = 1\,000\,000$. 4 boda

3. Konstruirajmo srednjice $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$ trokuta ABC. Tada je

$$P(\triangle A_1B_1C_1) = \frac{1}{4}P(\triangle ABC).$$

5 bodova

Dovoljno je pokazati da je (uz oznake kao na slici) zbroj površina trokuta $A_0C_1B_1$, $B_0A_1C_1$, $C_0B_1A_1$, jednak površini trokuta $A_1B_1C_1$. 5 bodova

Iz točaka A_1, B_1, C_1 povucimo okomice na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. To su simetrale stranica i one se sijeku u središtu O opisane kružnice trokuta ABC. 5 bodova

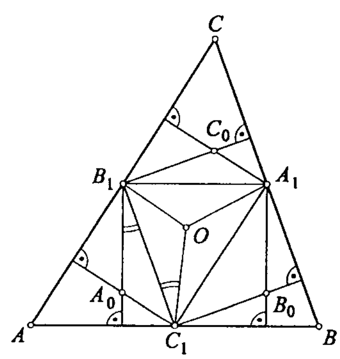
Tada vrijedi:

$$\triangle A_0C_1B_1 \cong \triangle OB_1C_1,$$

$$\triangle B_0A_1C_1 \cong \triangle OC_1A_1,$$

$$\triangle C_0B_1A_1 \cong \triangle OA_1B_1.$$

5 bodova



Dokažimo prvu sukladnost (ostale se dokazuju analogno). Iz

$$A_0B_1 \parallel OC_1 \quad \text{(okomiti na } AB\text{)},$$
$$A_0C_1 \parallel OB_1 \quad \text{(okomiti na } AC\text{)},$$

je $\sphericalangle A_0B_1C_1 = \sphericalangle OC_1B_1$, $\sphericalangle A_0C_1B_1 = \sphericalangle OB_1C_1$. Kako je stranica $\overline{B_1C_1}$ zajednička, trokuti $A_0C_1B_1$ i OB_1C_1 su sukladni. 5 bodova

4. Pomnožimo li drugi član s $\frac{x}{x}$, a treći s $\frac{xy}{xy}$, dobivamo 5 bodova

$$\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{xy+x}{xyz+xy+x}+\frac{xyz+xy}{x^2yz+xyz+xy}$$

$$= \frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{xy+x}{1+xy+x}+\frac{1+xy}{x+1+xy}$$

$$= \frac{2xy+2x+2}{xy+x+1}=2.$$

Dakle, izraz je konstantan i jednak 2. 20 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

2. ožujka 2001.

II. razred

1. Brojevi x i y zadovoljavaju sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} x + y + \frac{x}{y} &= 19, \\ \frac{x(x+y)}{y} &= 60. \end{aligned}$$

Koje sve vrijednosti može poprimiti $x + y$?

2. Trokutu ABC sa stranicama duljina $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ opisana je kružnica. Tangenta na tu kružnicu u točki C okomita je na stranicu $\overline{AB}$. Dokažite da je

$$(a^2 - b^2)^2 = c^2(a^2 + b^2).$$

3. Izračunajte vrijednost produkta

$$\left(1 + \frac{1+i}{2}\right)\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right)\cdots\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^k}\right)\cdots\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^{2001}}\right).$$

4. Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 9, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} &= 1, \end{aligned}$$

gdje je n prirodan broj, a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi.

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Izrazimo li $\frac{x}{y}$ iz druge jednadžbe i uvrstimo u prvu, dobivamo

$$x + y + \frac{60}{x+y} = 19.$$ 5 bodova

Pomnožimo li ovu jednadžbu s $x + y$, dobivamo kvadratnu jednadžbu s nepoznanicom $x + y$,

$$(x+y)^2 - 19(x+y) + 60 = 0.$$

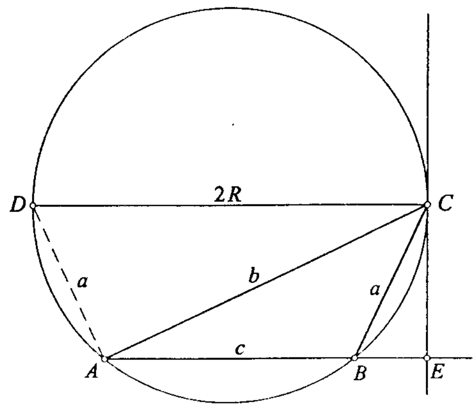
Njezina rješenja su $(x+y)_1 = 4$ i $(x+y)_2 = 15$. 10 bodova

Treba još vidjeti da li se ove vrijednosti zaista mogu postići.
Za $x + y = 4$ je $\frac{x}{y} = \frac{60}{x+y} = 15$, odakle dobivamo $x = \frac{15}{4}$, $y = \frac{1}{4}$.

Za $x + y = 15$ je $\frac{x}{y} = \frac{60}{x+y} = 4$, odakle dobivamo $x = \cancel{\frac{1}{4}}$, $y = \cancel{\frac{15}{4}}$. $x=12$, $y=3$

Dakle, $x + y$ zaista može poprimiti vrijednosti 4 i 15. 10 bodova

2. Neka je $\overline{CD}$ promjer kružnice. Tada je $CD \parallel AB$ i četverokut $ABCD$ je jednakokračan trapez, pri čemu je $|AD| = |BC| = a$. 5 bodova
Trokut ACD je pravokutan, pa je $a^2 + b^2 = 4R^2$. (1) 5 bodova



Neka je E presjek tangente u točki C s pravcem AB. Tada je $|BE| = R - \frac{c}{2}$, $|AE| = R + \frac{c}{2}$, a iz pravokutnih trokuta AEC i BEC dobivamo:

$$\begin{aligned} |AC|^2 - |AE|^2 &= |BC|^2 - |BE|^2 = |CE|^2, \\ b^2 - \left(R + \frac{c}{2}\right)^2 &= a^2 - \left(R - \frac{c}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

odakle se dobiva $R = \frac{b^2 - a^2}{2c}$. (2) 10 bodova
Uvrštavanjem (2) u (1) dobiva se tražena jednakost. 5 bodova

3. Izračunajmo najprije produkt prva dva člana:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1+i}{2}\right)\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right) &= \left(\frac{3+i}{2}\right)\left(\frac{2+i}{2}\right)\\ &= \frac{5(1+i)}{4}\\ &= (1+i)\left(1+\frac{1}{2^2}\right).\end{aligned}$$

5 bodova

Zatim izračunajmo produkt prva tri člana:

$$\begin{aligned}(1+i)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right) &= (1+i)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\\ &= (1+i)\left(1-\frac{1}{2^{2^2}}\right).\end{aligned}$$

Za $k \geq 3$ izračunajmo

$$\begin{aligned}1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^k} &= 1+\left[\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right]^{2^{k-2}}\\ &= 1+\left[-\frac{1}{2^2}\right]^{2^{k-2}}\\ &= 1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}.\end{aligned}$$

10 bodova

Sada produkt poprima ovaj oblik:

$$(1+i)\left(1-\frac{1}{2^{2^2}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^2}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^3}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^4}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^{2000}}}\right).$$ 5 bodova

Kako je $2^{2^k}\cdot 2^{2^k} = 2^{2\cdot 2^k} = 2^{2^{k+1}}$, odavde se vidi da je produkt jednak

$$(1+i)\left(1-\frac{1}{2^{2^{2001}}}\right).$$ 5 bodova

4. *Prvo rješenje.*

$$\begin{aligned}
9 &= (x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\\
&= \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}+\underbrace{\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)}_{\geq 2}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)}_{\geq 2}\\
&\geq n+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n^2.
\end{aligned}$$

Odavde je $n \in \{1,2,3\}$. 10 bodova

Za $n=1$ nema rješenja. 2 boda

Za $n=2$ iz $x_1+x_2=9$ i $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=1$, dobivamo $x_1x_2=x_1+x_2=9$, pa su $x_{1,2}$ rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2-9x+9=0.$$

Njezina rješenja su $x_{1,2}=\dfrac{9\pm 3\sqrt{5}}{2}$. 9 bodova

Za $n=3$ iz gornje nejednakosti dobivamo

$$6=\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)+\left(\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_2}\right)+\left(\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_3}\right)\geq 6,$$

pa mora vrijediti jednakost. Zato je

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2,\ \frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_2}=2,\ \frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_3}=2.$$

Iz prve jednakosti slijedi $(x_1-x_2)^2=0$, tj. $x_1=x_2$. Isto tako je $x_2=x_3$. Dakle, $x_1=x_2=x_3=3$. 9 bodova

Drugo rješenje. Nejednakost između harmonijske i aritmetičke sredine daje

$$\begin{aligned}
\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}} &\leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\\
\frac{n}{1} &\leq \frac{9}{n},
\end{aligned}$$

tj. $n^2\leq 9$, i dalje se nastavi kao u prvom rješenju.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

2. ožujka 2001.

III. razred

1. Riješite nejednadžbu

$$x^{1+\log_a x} > a^2 x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

2. Sfera sadrži vrhove donje baze kocke brida $a = 8$ cm i dodiruje gornju bazu. Koliki je njezin polumjer?

3. U ravnini su dane dvije različite točke A i B. Dokažite da se skup točaka M, takvih da je

$$\left||MA|^2 - |MB|^2\right| = kP(\triangle MAB),$$

gdje je $k > 0$ dana konstanta i $P(\triangle MAB)$ površina trokuta MAB, sastoji od dva pravca.

4. Kvadrat je upisan u kružni isječak OAB sa središnjim kutom $\alpha < \frac{\pi}{2}$, tako da su mu dva vrha na polumjeru $\overline{OA}$, treći na luku AB i četvrti na polumjeru $\overline{OB}$. Nađite omjer površina kružnog isječka i kvadrata.

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Moramo promatrati dva slučaja: $1^\circ\ a > 1$ i $2^\circ\ 0 < a < 1$. 5 bodova

$1^\circ\ a > 1$:

$$\begin{aligned} x^{1+\log_a x} &> a^2 x \quad / \log_a \\ \Rightarrow (1+\log_a x)\log_a x &> 2 + \log_a x \\ \Rightarrow (\log_a x)^2 &> 2 \\ \Rightarrow |\log_a x| &> \sqrt{2} \\ \Rightarrow \log_a x < -\sqrt{2} \ &\text{ili} \ \log_a x > \sqrt{2} \\ \Rightarrow x \in (0, a^{-\sqrt{2}}) &\cup (a^{\sqrt{2}}, \infty). \end{aligned}$$

10 bodova

$2^\circ\ 0 < a < 1$:

$$\begin{aligned} x^{1+\log_a x} &> a^2 x \quad / \log_a \\ \Rightarrow (1+\log_a x)\log_a x &< 2 + \log_a x \\ \Rightarrow (\log_a x)^2 &< 2 \\ \Rightarrow |\log_a x| &< \sqrt{2} \\ \Rightarrow -\sqrt{2} < \log_a x &< \sqrt{2} \\ \Rightarrow x \in (a^{\sqrt{2}}, a^{-\sqrt{2}}). & \end{aligned}$$

10 bodova

2. *Prvo rješenje.* Neka je S_1 središte donje, S_2 središte gornje baze kocke brida a, O središte sfere i R njezin polumjer. Iz razloga simetrije jasno je da je središte sfere na spojnici $\overline{S_1S_2}$. Sfera prolazi točkama A, B, C, D i S_2. Vrijedi:

$$|OS_1| + |OS_2| = a,$$

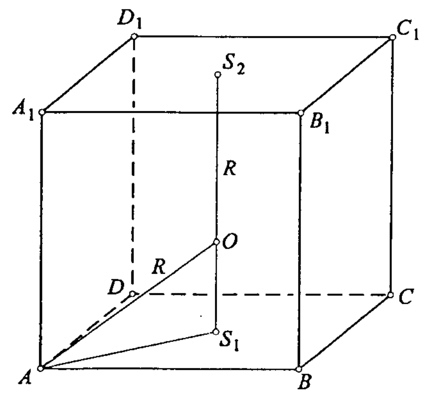
$$|OS_1| + R = a,$$

te (iz pravokutnog trokuta $\triangle AS_1O$):

$$|OS_1|^2 = |AO|^2 - |AS_1|^2,$$

$$|OS_1|^2 = R^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

$$(a-R)^2 = R^2 - \frac{a^2}{2}.$$



Odavde dobivamo $R = \dfrac{3a}{4}$, tj., kako je $a = 8$ cm, $R = 6$ cm. 25 bodova

Drugo rješenje. Neka je S_1 središte donje, a S_2 središte gornje baze kocke. Trokut ACS_2 je jednakokračan, a plumjer tražene sfere je polumjer njemu opisane kružnice. 5 bodova

Duljina dijagonale kvadrata $ABCD$ je $|AC| = 8\sqrt{2}$ cm.

Visina $\triangle ACS_2$ je $|S_1S_2| = 8$ cm.

Iz pravokutnog trokuta S_1CS_2 je $|CS_2| = \sqrt{|S_1S_2|^2 + |CS_1|^2} = 4\sqrt{6}$. 10 bodova

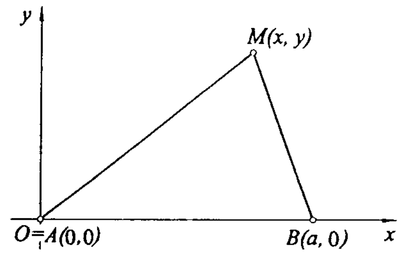
Polumjer opisane kružnice trokuta stranica a, b, c i površine P je $R = \dfrac{abc}{4P}$.

U našem slučaju je $a = |AC| = 8\sqrt{2}$, $b = c = |CS_2| = 4\sqrt{6}$,

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |S_1S_2| = 32\sqrt{2}, \qquad R = 6 \text{ cm}.$$ 10 bodova

općinsko 2001.
3. razred

3. Promatrajmo zadatak u koordinatnoj ravnini u kojoj je $A(0,0)$, $B(a,0)$, $(a>0)$, $M(x,y)$. 5 bodova



Tada je

$$|MA|^2 = x^2 + y^2, \quad |MB|^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

$$||MA|^2 - |MB|^2| = a|2x-a|.$$ 5 bodova

Visina trokuta MAB je jednaka apsolutnoj vrijednosti ordinate točke M. Dakle,

$$P(\triangle MAB) = \frac{1}{2}a|y|.$$ 5 bodova

Iz uvjeta slijedi

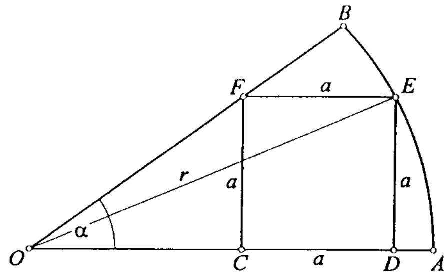
$$a|2x-a| = \frac{k}{2}a|y| \qquad \text{tj.} \qquad |2x-a| = \frac{k}{2}|y|.$$

Odavde je

$$2x - a = \frac{k}{2}y \qquad \text{ili} \qquad 2x - a = -\frac{k}{2}y,$$

a to su jednadžbe dvaju pravaca. 10 bodova

4. Iz trokuta OCF je $|OC| = a \operatorname{ctg} \alpha$.



5 bodova

U trokutu ODE je $|OE| = r$,

$$\begin{aligned}(|OC| + |CD|)^2 + |DE|^2 &= r^2\\ (a \operatorname{ctg} \alpha + a)^2 + a^2 &= r^2\\ 1 + (1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 &= \left(\frac{r}{a}\right)^2.\end{aligned}$$

10 bodova

Ako je kut α zadan u radijanima, površina kružnog isječka je $P_1 = \dfrac{r^2\alpha}{2}$, a kvadrata $P_2 = a^2$, a njihov omjer je

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \cdot [1 + (1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2].$$ 10 bodova

Napomena. Ako je kut α zadan u stupnjevima, onda je $P_1 = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2\pi$. Tada je

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot [1 + (1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2)]\pi.$$

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

2. ožujka 2001.

IV. razred

1. Točka $(0,3)$ je na paraboli $f(x) = x^2 + px + q$. Tangenta parabole u toj točki ima koeficijent smjera $k = -1$. Odredite ~~njezinu~~ jednadžbu. parabole.

2. Zadan je niz 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ..., kod kojeg se razlika susjednih članova uvećava za 1.

a) Odredite opći član niza.

b) Odredite zbroj prvih n članova niza, za prirodan broj n.

3. Nađite sve funkcije $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednadžbu

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x.$$

4. Oko okruglog stola sjedi m žena i n muškaraca $(m + n \geq 3)$. Kada, u ovisnosti o m i n, možemo sa sigurnošću tvrditi da postoji osoba koja sjedi između dva muškarca?

Općinsko 2001.

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Prema podacima je $3 = f(0) = q$. 5 bodova
Jednadžba tangente je oblika

$$y - 3 = -1 \cdot (x - 0) \quad \text{tj.} \quad y = -x + 3.$$ 5 bodova

Kako tangenta s parabolom ima jedinstvenu zajedničku točku dodira, diskriminanta kvadratne jednadžbe $x^2 + px + 3 = -x + 3$ tj. $x^2 + (p+1)x = 0$, mora biti jednaka nuli. Dakle,
$D = (p+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, tj. $p = -1$. 10 bodova
Jednadžba parabole je $f(x) = x^2 - x + 3$. 5 bodova

Napomena. Može se riješiti i pomoću derivacije. (Koeficijent smjera tangente u točki $(0,3)$ je $\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = (2x+p)_{x=0} = p$, pa iz danog uvjeta slijedi $p = -1$.)

2. a) Vrijedi:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0,\\
a_2 - a_1 &= 1,\\
a_3 - a_2 &= 2,\\
&\dots\\
a_{n-2} - a_{n-3} &= n-3,\\
a_{n-1} - a_{n-2} &= n-2,\\
a_n - a_{n-1} &= n-1.
\end{aligned}$$

5 bodova

Zbrojimo li ove jednakosti, dobijemo

$$a_n = 1 + 2 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$ 5 bodova

b) Nadalje,

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2 - k) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right),
\end{aligned}$$

a odatle,

$$s_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$ 15 bodova

općinsko 2001.
4. razred

3. Stavimo li $t = \dfrac{x-3}{x+1}$, dobivamo $x = \dfrac{3+t}{1-t}$, i

$$f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = \frac{3+t}{1-t}. \qquad (1)$$ 10 bodova

Neka je sada $t = \dfrac{3+x}{1-x}$. Tada je $x = \dfrac{t-3}{t+1}$, i

$$f\left(\frac{3+t}{1-t}\right) + f(t) = \frac{t-3}{t+1}. \qquad (2)$$ 10 bodova

Zbrajanjem (1) i (2), dobivamo

$$2f(t) + \underbrace{f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) + f\left(\frac{3+t}{1-t}\right)}_{=t} = \frac{8t}{1-t^2}.$$

Odavde je

$$f(t) = \frac{4t}{1-t^2} - \frac{t}{2}.$$ 5 bodova

4. Neka je
a broj osoba koje sjede između dva muškarca,
b broj osoba koje sjede između dvije žene,
c broj osoba koje sjede između muškarca i žene.

Tada je $2a + c = 2n$ i $2b + c = 2m$ (svaka osoba je susjed dvjema). 5 bodova

Kada ne bi bilo osobe između dva muškarca ($a = 0$), onda bi svaka osoba imala najviše jednog susjeda muškarca i bilo bi $c = 2n$. Odatle slijedi $b = m - n$. Kako mora biti $b \geq 0$, zaključujemo $m \geq n$. 5 bodova

Ako je $m > n$, ne mora postojati osoba koja sjedi između dva muškarca, što se vidi na primjeru
MMŽŽMMŽŽ...MMŽŽM(M)ŽŽŽ...,
zavisno o tome da li ima paran ili neparan broj muškaraca.

Ako je $m < n$ onda (prema gornjoj analizi) nikako ne može biti $a = 0$, tj. tada možemo sa sigurnošću tvrditi da postoji osoba koja sjedi između dva muškarca. 5 bodova

Ostaje još razmotriti slučaj $m = n$.

Ako je $m = n = 2k$, onda ne mora postojati takva osoba. Tada postoji ovakav raspored
MMŽŽMMŽŽ... 5 bodova

Neka je $m = n$ neparan broj. Neka su stolice obojene naizmjence crvenom i plavom bojom. Pretpostavimo da na plavim stolicama (ima ih neparno mnogo) ima više muškaraca nego žena (inače bi to bio slučaj s crvenim stolicama). Tada sigurno na neke dvije "susjedne" plave stolice (između njih je jedna crvena stolica) sjede dva muškarca. Stoga u ovom slučaju možemo sa sigurnošću tvrditi da postoji osoba koja sjedi između dva muškarca. 5 bodova