MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Regionalno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

Bjelovar, Korčula, Novalja, Vukovar, 24. svibnja 2002. godine

Zadaci za 5. razred

1. S koliko je ukupno prirodnih brojeva djeljiv broj 400? Koliko je njegovih djelitelja parno, a koliko neparno?

2. Svaki učenik 5.b razreda neke škole uči bar jedan od sljedeća 3 strana jezika: engleski, njemački i francuski. Ukupno 18 učenika tog razreda uči engleski, 15 njemački, a 9 francuski jezik. Pri tome 10 učenika uči i engleski i njemački jezik, 7 učenika engleski i francuski, a 6 francuski i njemački. 5 učenika tog razreda uči sva tri navedena strana jezika. Koliko učenika ima u tom razredu? Koliko ih uči samo njemački jezik, a koliko engleski i francuski jezik, ali ne i njemački?

3. U svaki kvadratić upiši po jednu znamenku tako da jednakost bude istinita, a svaka od znamenki 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 u njoj bude upotrijebljena točno jedanput.

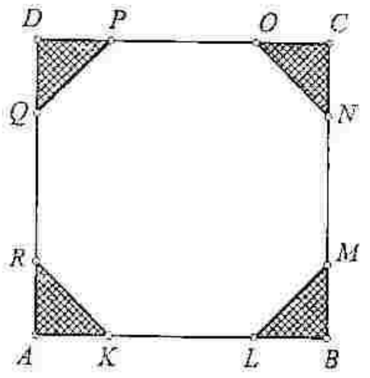
$$2\square\square \cdot \square 8 = 5\square\square\square$$

4. Odredi sve parove znamenki a i b tako da umnožak broja $\overline{43a}$ i četveroznamenkastog broja $\overline{b561}$ bude djeljiv s 15.

5. Dan je kvadrat $ABCD$ sa stranicama duljine 8 cm. Kao na slici, neka su K, L, M, N, O, P, Q i R točke na stranicama tog kvadrata takve da je

$$|AK| = |LB| = |BM| = |NC| = |CO| = |PD| = |DQ| = |RA| = 2 \text{ cm}.$$

Konstruiraj osnosimetričnu sliku lika $KLMNOPQR$ s obzirom na pravac koji prolazi polovištima stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ i izračunaj površinu zajedničkog dijela lika $KLMNOPQR$ i njegove osnosimetrične slike.



RJEŠENJA ZADATAKA ZA 5. RAZRED

1. 1. način. Prvo je broj 400 potrebno rastaviti na proste faktore. Učinimo li to, dobijemo $400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Prema tome, osim broja 1, koji je djelitelj svakog prirodnog broja, jedini djelitelji broja 400 bit će njegovi prosti faktori 2 i 5, te njihovi međusobni umnošci. Budući da se broj 2 u rastavu broja 400 na proste faktore nalazi kao faktor 4 puta, a broj 5 dva puta, svaki od djelitelja broja 400 bit će umnožak od 0, 1, 2, 3 ili 4 faktora 2, te 0, 1 ili 2 faktora 5. To znači da su svi djelitelji dani sljedećom tablicom (prvi redak tablice označava broj faktora 5, a prvi stupac broj faktora 2).

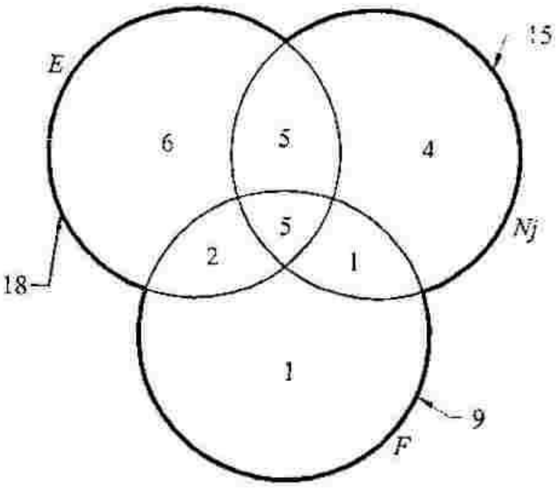
	0	1	2
0	1	5	$5 \cdot 5 = 25$
1	2	$2 \cdot 5 = 10$	$2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$
2	$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$	$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 100$
3	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 200$
4	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 80$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 400$

Dakle, broj 400 ima ukupno 15 prirodnih djelitelja. To su 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200 i 400. Očito, među njima su 3 neparna i 12 parnih brojeva.

2. način. Kao i u prethodnom rješenju, broj 400 prikazat ćemo kao umnožak prostih faktora, $400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Prema tome, jedini prirodni djelitelji broja 400 bit će broj 1, prosti brojevi 2 i 5, te umnošci od 0, 1, 2, 3 ili 4 faktora 2, te 0, 1 ili 2 faktora 5. To znači da broj faktora 2 u umnošku možemo izabrati na 5, a broj faktora 5 na 3 načina, odakle je broj djelitelja od 400 jednak $5 \cdot 3 = 15$. Neparni djelitelji bit će oni koji ne sadrže faktor 2, a to su 1, 5 i $5 \cdot 5 = 25$, tj. ima ih 3. Broj parnih djelitelja tada je $15 - 3 = 12$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Promotrimo najprije skupinu od 18 učenika 5.b razreda koji uče engleski jezik. Uočimo da među njima ima onih koji uče samo engleski jezik, onih koji uče engleski i još točno jedan od dva preostala navedena strana jezika, ali i onih koji uče sva tri jezika. Isti zaključak vrijedi i za 15 učenika tog razreda koji uče njemački jezik, te za 9 učenika koji uče francuski. Zbrojimo li broj učenika koji uče engleski, broj učenika koji uče njemački i broj učenika koji uče francuski, dobivamo $18 + 15 + 9 = 42$, no pritom smo one koji uče točno dva jezika brojali dvaput, a one koji uče sva tri jezika tri puta, po jednom za svaki jezik. Prema tome, da bismo odredili točan broj učenika u 5.b razredu, od dobivenog zbroja moramo oduzeti brojeve učenika koji uče po bar dva strana jezika. Novi rezultat je $42 - 10 - 7 - 6 = 19$, što još uvijek nije točan broj učenika u razredu, budući da smo učenike koji uče sva tri jezika oduzeli jedan puta previše. To znači da ih moramo ponovo pribrojiti, odakle slijedi da u 5.b razredu ima točno $19 + 5 = 24$ učenika.



Nadalje, broj učenika koji uče samo njemački jezik dobit ćemo tako da od broja svih učenika koji uče njemački oduzmemo one koji uče bar još jedan dodatni strani jezik, a dobivenoj razlici opet pribrojimo one koje smo oduzeli dva puta (to su učenici koji uče sva tri strana jezika). Dakle, traženi broj je $15 - 10 - 6 + 5 = 4$. Konačno, broj učenika 5.b razreda koji uče engleski i francuski jezik, ali ne i njemački dobit ćemo tako da od broja onih koji uče engleski i francuski oduzmemo one koji uče sva tri strana jezika. Taj je broj $7 - 5 = 2$.
Dakle, u 5.b razredu ima ukupno 24 učenika, od kojih 4 učenika uče samo njemački jezik, a 2 učenika engleski i francuski jezik, ali ne i njemački.

Napomena. Prilikom analize zadatka korisno je poslužiti se Vennovim dijagramom, kao na slici.

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Označimo tražene znamenke slovima:

$$2\,\boxed{a}\,\boxed{b} \cdot \boxed{c}\,8 = 5\,\boxed{d}\,\boxed{e}\,\boxed{f}$$

Uočimo odmah da su znamenke 2, 5 i 8 već iskorištene, pa moramo rasporediti još 1, 3, 4, 6, 7 i 9. Budući da je $200 \cdot 38 = 7\,600 > 6000$, a znamenka 2 je iskorištena, jasno je da mora biti $c = 1$. Također, kako je sada 3 najmanja neiskorištena znamenka, umnožak $\overline{5def}$ sigurno mora biti veći od 5 300. Iz $279 \cdot 18 = 5\,022 < 5\,300$ zato slijedi da je

$a > 7$, tj. $a = 9$ (znamenka 8 je već iskorištena). Prema tome, b je jedna od znamenki 3, 4, 6 ili 7. Uvrštavanjem dobivamo redom $293 \cdot 18 = 5\,274$, $294 \cdot 18 = 5\,292$, $296 \cdot 18 = 5\,328$ i $297 \cdot 18 = 5\,346$, odakle vidimo da se jedino u posljednjoj jednakosti nalaze sve znamenke od 1 do 9 (u ostalima se više puta ponavlja znamenka 2). Dakle, rješenje je

$$2\boxed{9}\boxed{7} \cdot \boxed{1}8 = 5\boxed{3}\boxed{4}\boxed{6} .$$

.... UKUPNO 10 BODOVA

$\boxed{4.}$ Da bi broj $B = \overline{b561}$ bio četveroznamenkast, nužno je $b \neq 0$, tj. $b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Uočimo odmah da taj broj nije djeljiv s 5 ni za jedno b jer mu znamenka jedinica nije niti 0 niti 5. To dalje znači da broj B nije djeljiv niti s $15 = 5 \cdot 3$, pa će umnožak $A \cdot B$, gdje je $A = \overline{43a}$, biti djeljiv s 15 jedino u sljedeća dva slučaja: (a) A je djeljivo s 15; (b) A je djeljivo s 5, a B s 3. Razmotrimo te slučajeve redom.

(a) Da bi A bio djeljiv s 15, on mora biti djeljiv i sa 5 i sa 3. S 5 će biti djeljiv samo za $a = 0$ ili $a = 5$. No, za $a = 0$ broj 430 nije djeljiv s 3, pa taj slučaj otpada. Ako pak je $a = 5$, broj 435 djeljiv je i sa 3, što znači da je umnožak $A \cdot B$ djeljiv s 15 za svaki izbor znamenke $b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Dakle, imamo 9 parova znamenki: $a = 5$ i $b = 1$; $a = 5$ i $b = 2$; $a = 5$ i $b = 3$; $a = 5$ i $b = 4$; $a = 5$ i $b = 5$; $a = 5$ i $b = 6$; $a = 5$ i $b = 7$; $a = 5$ i $b = 8$; $a = 5$ i $b = 9$.

(b) Kao i u prethodnom slučaju, broj A će biti djeljiv s 5 jedino za $a = 0$ ili $a = 5$. S druge strane, B će biti djeljiv s 3 jedino ukoliko je zbroj njegovih znamenki, tj. $b + 5 + 6 + 1 = b + 12$ djeljiv s 3, što je moguće samo za $b \in \{3, 6, 9\}$ (b je znamenka različita od 0. Dakle, u ovom slučaju odgovarajući parovi znamenki su: $a = 0$ i $b = 3$; $a = 0$ i $b = 6$; $a = 0$ i $b = 9$; $a = 5$ i $b = 3$; $a = 5$ i $b = 6$; $a = 5$ i $b = 9$.

Zajedno, traženi parovi znamenki su

R. BR.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
a	0	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5
b	3	6	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Vidimo da ih ima ukupno 12.

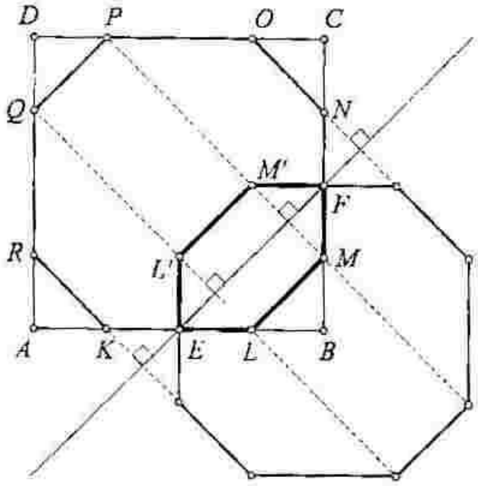
.... UKUPNO 10 BODOVA

$\boxed{5.}$ Iz teksta zadatka vidljivo je da je lik $KLMNOPQR$ nastao izrezivanjem 4 rubna trokuta iz kvadrata $ABCD$. Konstrukcija osnosimetrične slike tog lika vidljiva je iz slike. Također, uočimo da je zajednički dio lika $KLMNOPQR$ i njegove osnosimetrične slike lik $ELMFM'L'$, pri čemu su E i F redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ kvadrata $ABCD$, a L' i M' redom osnosimetrične slike točaka L i M obzirom na zadanu os simetrije. Odredimo površinu tog lika. Vidimo da je ona jednaka zbroju površina četverokuta $ELMF$ i $EL'M'F$. Budući da su ta dva lika dobiveni jedan iz drugog osnom simetrijom s obzirom na pravac EF, njihove su površine jednake. Zato je

$$P(ELMFM'L') = 2P(ELMF) = 2[P(EBF) - P(LBM)] .$$

Trokut EBF je polovina kvadrata stranica duljine $|EB| = |AB| : 2 = 8 : 2 = 4$ cm, tj. površine $4 \cdot 4 = 16$ cm^2, pa je površina tog trokuta $P(EBF) = 16 : 2 = 8$ cm^2. Slično, i trokut LBM je polovina kvadrata stranica duljine 2 cm, tj. površine $2 \cdot 2 = 4$ cm^2. Zato je njegova površina jednaka $P(LBM) = 4 : 2 = 2$ cm^2. Konačno, tražena površina je

$$P(ELMFM'L') = 2 \cdot (8 - 2) = 2 \cdot 6 = 12 \text{ cm}^2 .$$



.... UKUPNO 10 BODOVA