MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

25. ožujka 2002. godine

Zadaci za 5. razred

1. U kvadratiće na slici rasporedi brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, tako da dobiješ naznačene umnoške.

$$\begin{array}{ccccccc} \square & \cdot & \square & \cdot & \square & = & 84 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\ \square & \cdot & \square & \cdot & \square & = & 15 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\ \square & \cdot & \square & \cdot & \square & = & 288 \\ \| & & \| & & \| & & \\ 48 & & 40 & & 189 & & \end{array}$$

2. Na jednom natjecanju iz matematike bilo je 36 učenika petog razreda. Svaki je učenik za pisanje dobio jednu olovku – crvenu, plavu ili zelenu. Zelenu je olovku dobilo 5 učenika. Da je njih petoro umjesto zelene olovke dobilo crvenu, broj učenika koji su dobili plavu olovku bio bi tri puta manji od broja učenika koji su dobili crvenu olovku. Koliko je učenika dobilo crvenu, a koliko plavu olovku?

3. Neven je zamislio dva broja. Prvi broj kojeg je zamislio je četveroznamenkast, znamenka jedinica mu je 1, a znamenka tisućica jednaka je znamenki stotica. Drugi zamišljeni broj je dvoznamenkast, a ostatak pri dijeljenju prvog broja drugim iznosi 98. Koje je brojeve zamislio Neven?

4. Ponedjeljkom 5.b razred jedne škole ima četiri sata nastave, i to jedan sat hrvatskog jezika, jedan sat matematike, jedan sat povijesti i jedan sat zemljopisa. Na koliko je načina moguće sastaviti raspored sati 5.b razreda za taj dan, ukoliko sat matematike ne smije biti neposredno iza sata zemljopisa?

5. Na pravcu p zadane su točke K, A, B, C, D i L, kao na slici. Pri tome dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ imaju jednake duljine, polovišta dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ udaljena su 64 cm, a udaljenost polovišta dužina $\overline{KA}$ i $\overline{DL}$ iznosi 130 cm. Odredi duljinu dužine $\overline{KL}$.

ŽN 2002.

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 5. RAZRED

ZA SVAKI OD ZADATAKA OVDJE SU DANI NEKI OD MOGUĆIH NAČINA RJEŠAVANJA. UKOLIKO JE UČENIK ZADATAK RJEŠAVAO NA DRUGAČIJI NAČIN, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE ADEKVATNO BODOVATI I OCIJENITI NJEGOV RAD.

1. Svaki od brojeva 84, 15, 288, 48, 40 i 189 treba prikazati kao umnožak tri različita faktora iz skupa $\{1, 2, \ldots, 9\}$. U prvi, drugi i treći redak na slici treba upisati redom rastave brojeva 84, 15 i 288 na tri faktora, dok se u prvom, drugom i trećem stupcu trebaju nalaziti redom rastavi brojeva 48, 40 i 189. Prema tome, broj kojeg treba upisati u kvadratić na presjeku prvog retka i prvog stupca treba biti zajednički faktor brojeva 84 i 48, broj u kvadratiću na presjeku prvog retka i drugog stupca treba biti zajednički faktor brojeva 84 i 40, a analogni zaključci vrijede i za brojeve u kvadratićima na presjecima ostalih redaka i stupaca. 1 BOD

To znači da trebamo otkriti zajedničke faktore brojeva 84, 15, 288, 48, 40 i 189, što ćemo najlakše napraviti rastavimo li svaki od njih na proste faktore. Vrijedi: $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$, $15 = 3 \cdot 5$, $288 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ i $189 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. 2 BODA

Uočimo da faktor 5 sadrže jedino brojevi 15 i 40, odakle zaključujemo da broj 5 treba upisati u kvadratić na presjeku drugog retka i drugog stupca. 1 BOD

Slično, broj 7 treba upisati u kvadratić na presjeku prvog retka i trećeg stupca, jer je on faktor jedino brojeva 84 i 189. 1 BOD

Iz rastava na proste faktore čitamo i da su s 9 djeljivi jedino brojevi 288 i 189, što znači da se u kvadratiću na presjeku trećeg retka i trećeg stupca treba nalaziti broj 9. 1 BOD

Sada je jednostavno ispuniti i preostali prazan kvadratić u trećem stupcu. U njega treba upisati broj $189 : (7 \cdot 9) = 3$. Odavde je odmah vidljiv i broj u kvadratiću na presjeku drugog retka i prvog stupca, tj. $15 : (5 \cdot 3) = 1$. 1 BOD

Još nam je ostalo u kvadratiće rasporediti brojeve 2, 4, 6 i 8. Kako smo iskoristili sve faktore 3 iz broja 288, zaključujemo da su još jedino 84 i 48 djeljivi sa 6, te taj broj upisujemo u kvadratić na presjeku prvog retka i prvog stupca. 1 BOD

Odavde slijedi da u preostalom praznom kvadratiću u prvom retku treba pisati $84 : (6 \cdot 7) = 2$, što znači da se na presjeku trećeg retka i drugog stupca treba nalaziti $40 : (2 \cdot 5) = 4$. 1 BOD

Na preostalo prazno mjesto upišemo broj 8, čime je zadatak riješen. Rješenje se nalazi na slici desno. 1 BOD

6	2	7	= 84
1	5	3	= 15
8	4	9	= 288
48	40	189	

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. <u>1. način</u> Da svih 5 učenika dobivene zelene olovke zamijeni crvenima, prema uvjetu zadatka, broj učenika s plavim olovkama bio bi tri puta manji od broja učenika s crvenim olovkama. To znači da bi broj učenika s crvenim olovkama nakon te zamjene bio trostruko veći od broja učenika s plavim olovkama, 4 BODA

odnosno ukupan broj učenika bio bi četiri puta veći od broja učenika s plavim olovkama. 3 BODA

Kako ima ukupno 36 učenika, zaključujemo da plavu olovku ima njih $36 : 4 = 9$. 1 BOD

Ostali učenici, tj. njih $36 - 9 = 27$, imali bi crvene olovke, 1 BOD

što znači da ih je prije zamjene s crvenim olovkama bilo $27 - 5 = 22$. 1 BOD

Prema tome, na početku je 9 učenika dobilo plavu, a 22 crvenu olovku.

.... UKUPNO 10 BODOVA

<u>2. način</u> Zadatak se može riješiti i uvođenjem oznake za nepoznatu veličinu, tj. svođenjem na linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom. Označimo s x broj učenika koji su dobili plavu olovku 1 BOD

i pretpostavimo da ostali učenici imaju crvenu olovku, tj. da je 5 učenika svoje zelene olovke već zamijenilo crvenima. Prema uvjetima zadatka, broj učenika s plavom sada je tri puta manji od broja učenika s crvenom olovkom, tj. učenika s crvenom olovkom tri je puta više od onih s plavom. Prema tome, crvenu olovku ima $3x$ učenika. 3 BODA

Budući da je time obuhvaćeno svih 36 učenika, vrijedi jednakost $x + 3x = 36$, 2 BODA

odakle je $4x = 36$, 1 BOD

odnosno $x = 9$. 1 BOD

Dakle, plavu je olovku na početku dobilo 9 učenika, pa nakon zamjene zelenih olovaka crvenima takvu olovku ima $3 \cdot 9 = 27$ učenika, 1 BOD

što znači da ih je na početku s crvenom olovkom bilo $27 - 5 = 22$. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Prema uvjetu zadatka, prvi zamišljeni broj je oblika $\overline{aab1}$, pri čemu su $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ i $a \neq 0$. 1 BOD

Znamo da je ostatak pri dijeljenju dva prirodna broja uvijek manji od djelitelja. Budući da je drugi zamišljeni broj dvoznamenkast, a ostatak pri dijeljenju prvog broja drugim iznosi 98, zaključujemo da drugi zamišljeni broj može biti jedino 99. 2 BODA

Trebamo još odrediti znamenke a i b broja $\overline{aab1}$. Ostatak pri dijeljenju tog broja s 99 iznosi 98, te je broj $\overline{aab1} + 1$ djeljiv s 99, tj. s 9 i s 11. 2 BODA

Pogledajmo najprije što slijedi iz djeljivosti s 11. Imamo

$$\overline{aab1} + 1 = 1000a + 100a + 10b + 1 + 1 = 1100a + 10b + 2 = 11 \cdot 100a + 10b + 2,$$ 1 BOD

odakle vidimo da je $10b + 2$ djeljivo s 11. 1 BOD

No, kako je b znamenka, to vrijedi samo za $b = 2$. 1 BOD

Ostalo je odrediti znamenku a, tako da broj $\overline{aa21}$ bude djeljiv s 9. To će vrijediti jedino ako je zbroj njegovih znamenaka, $a + a + 2 + 1 = 2a + 3$, djeljiv s 9, 1 BOD

što je moguće jedino za $a = 3$ (a je znamenka!). 1 BOD

Prema tome, prvi zamišljeni broj je 3321, a drugi 99.

.... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Znamenke broja $\overline{aab1}$ mogli smo odrediti i na drugi način. Naime, iz činjenice da $\overline{aab1}$ pri dijeljenju s 99 daje ostatak 98 slijedi da je broj $\overline{aab1} - 98$ djeljiv s 99, tj. s 9 i s 11. 2 BODA

Dakle, dalje proučavamo broj

$$\overline{aab1} - 98 = 1000a + 100a + 10b + 1 - 98 = 1100a + 10b + 2 - 99 = 11(100a - 9) + 10b + 2,$$ 1 BOD

koji je djeljiv s 11 samo ako je $10b + 2$ djeljivo s 11, 1 BOD

odnosno ako je $b = 2$ (b je znamenka!). 1 BOD

Dalje nastavljamo kao i u prethodnom rješenju.

....

4. 1. način Rasporede ćemo grupirati prema tome gdje se u njima nalazi sat zemljopisa. Uočimo najprije da on može biti bilo koji sat po redu, tj. prvi, drugi, treći ili četvrti sat nastave. 1 BOD

Pretpostavimo da je zemljopis prvi sat nastave. Tada matematika ne može biti drugi sat po redu, nego samo treći ili četvrti, tj. njeno mjesto u rasporedu možemo odabrati na dva načina. Kad smo odabrali koji je sat nastave matematika, ostaje na preostala dva mjesta u rasporedu razmjestiti hrvatski jezik i povijest, što možemo napraviti na dva načina. Prema tome, rasporeda sati u kojima je zemljopis prvi sat nastave, a matematika nije odmah iza njega ima $2 \cdot 2 = 4$. 2 BODA

Potpuno analogno zaključujemo i u slučaju kada je zemljopis drugi sat nastave, a matematika ne smije biti treći sat po redu. Tada je matematika ili prvi ili četvrti sat, pa takvih odgovarajućih rasporeda opet ima $2 \cdot 2 = 4$. 2 BODA

Isto vrijedi i kada je zemljopis treći sat nastave. Matematika tada može biti samo prvi ili drugi sat po redu, pa je broj takvih rasporeda opet $2 \cdot 2 = 4$. 2 BODA

Ostao je još slučaj kada je zemljopis četvrti, tj. zadnji sat nastave. Tada matematika može biti bilo koji od prva tri sata, tj. njezinu poziciju u rasporedu možemo izabrati na tri načina. Nakon što smo to učinili, na ostala dva mjesta u rasporedu razmjestimo povijest i hrvatski jezik, što možemo na dva načina. Dakle, odgovarajućih rasporeda ima $3 \cdot 2 = 6$. 2 BODA

Zajedno, uzimanjem u obzir sva četiri slučaja, rasporeda sati u kojima sat matematike nije neposredno iza sata zemljopisa ima $4 + 4 + 4 + 6 = 18$. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. način Zadatak se može riješiti i tako da se umjesto primjene osnovnih principa prebrojavanja ispišu svi traženi rasporedi. I u ovom slučaju treba napraviti plan po kojem ćemo ih tražiti, kako neki od rasporeda ne bismo propustili. Označimo li hrvatski jezik sa H, matematiku s M, povijest s P, a zemljopis sa Z, možemo postupno ispuniti tablicu (slika desno) traženih rasporeda, organiziranu prema mjestu sata zemljopisa i, ovisno o tome, matematike (npr. oznaka MZPH predstavlja raspored u kojem je matematika prvi, zemljopis drugi, povijest treći, a hrvatski jezik četvrti sat nastave). 9 BODOVA

Iz tablice je vidljivo da rasporeda ima 18. 1 BOD

Z _ _ _	Z _ M _	ZHMP, ZPMH
	Z _ _ M	ZHPM, ZPHM
_ Z _ _	M Z _ _	MZHP, MZPH
	_ Z _ M	HZPM, PZHM
_ _ Z _	M _ Z _	MHZP, MPZH
	_ M Z _	HMZP, PMHZ
_ _ _ Z	M _ _ Z	MHPZ, MPHZ
	_ M _ Z	HMPZ, PMHZ
	_ _ M Z	HPMZ, PHMZ

.... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. U tablici koja slijedi dajemo prijedlog bodovanja, ovisno o tome koliko je učenik pronašao rasporeda.

Pronađeno rasporeda	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Broj bodova	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9

....

ŽN 2002. - 5. r.

3. način Broj rasporeda sati u kojima sat matematike nije neposredno iza sata zemljopisa možemo odrediti i zaobilaznim putem, tako da odredimo broj svih mogućih rasporeda sati i broj rasporeda koji ne zadovoljavaju postavljeni uvjet, tj. u kojima sat matematike slijedi neposredno iza sata zemljopisa. Broj traženih rasporeda tada dobijemo kao razliku ta dva broja. 2 BODA

Odredimo najprije broj svih mogućih rasporeda sati. Što će biti prvi sat nastave, možemo odabrati na četiri načina jer to može biti bilo koji od predloženih predmeta. 1 BOD

Pošto smo odabrali predmet koji će biti prvi po rasporedu, drugi sat možemo odabrati na tri načina, kao bilo koji od preostala tri predmeta. 1 BOD

Nakon toga, treći sat biramo na dva načina, od preostala dva predmeta, a neraspoređeni predmet bit će četvrti sat nastave. 1 BOD

Dakle, ukupno ima $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ rasporeda sati. 1 BOD

Izračunajmo sada broj rasporeda sati u kojima je sat matematike neposredno iza sata zemljopisa. U ovom slučaju zemljopis ne može biti četvrti, tj. zadnji sat nastave, nego samo prvi, drugi ili treći. 1 BOD

U svakom od ta tri slučaja, nakon što smjestimo zemljopis i matematiku (odmah iza zemljopisa) u raspored, na preostala dva mjesta ostaje razmjestiti dva predmeta – hrvatski jezik i povijest, što možemo na dva načina. 1 BOD

Dakle, takvih rasporeda ima $3 \cdot 2 = 6$. 1 BOD

Zato je broj traženih rasporeda $24 - 6 = 18$. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Učenik je zadatak mogao riješiti i tako da ispiše sve moguće rasporede sati (njih 24) i onda izdvoji i prebroji one s traženim svojstvom. Bodovanje je u tom slučaju isto kao i kod 2. načina rješavanja.

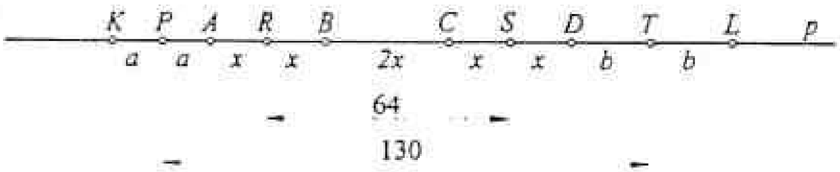
....

5. Neka su točke P, R, S i T redom polovišta dužina $\overline{KA}$, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DL}$. Označimo duljine dužina $\overline{KP}$, $\overline{AR}$ i $\overline{DT}$ redom sa a, x i b. 1 BOD

Budući da polovište dijeli dužinu na dvije dužine jednakih duljina, imamo $|KP| = |PA| = a$, $|AR| = |RB| = x$, $|AB| = |AR| + |RB| = 2x$, $|DT| = |TL| = b$ i $|DL| = |DT| + |TL| = 2b$. 1 BOD

Iz pretpostavke da su dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ jednakih duljina sada slijede i jednakosti $|AB| = |BC| = |CD| = 2x$, te $|CS| = |SD| = x$. 1 BOD

Unesimo ove podatke u sliku.



Skica 1 BOD

Sa slike odmah možemo očitati sljedeće jednakosti: $|RS| = |RB| + |BC| + |CS| = x + 2x + x = 4x$, 1 BOD

$|PT| = |PA| + |AB| + |BC| + |CD| + |DT| = a + 2x + 2x + 2x + b = (a + b) + 6x$ 1 BOD

i $|KL| = |KP| + |PT| + |TL| = |PT| + (a + b)$. 1 BOD

Kako je po uvjetima zadatka $|RS| = 64$ cm, imamo $4x = 64$, tj. $x = 16$ cm. 1 BOD

Također, iz uvjeta $|PT| = 130$ cm slijedi da je $(a+b)+6x = 130$, odnosno $a+b = 130-6x = 130-6\cdot 16 = 130-96 = 34$, tj. $a + b = 34$ cm. 1 BOD

Konačno, imamo $|KL| = |PT| + (a + b) = 130 + 34 = 164$ cm. 1 BOD

Dakle, tražena duljina iznosi 164 cm.

.... UKUPNO 10 BODOVA