MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

25. ožujka 2002. godine

Zadaci za 6. razred

1. U prazna polja kvadrata na slici upiši cijele brojeve tako da zbroj brojeva u svakom retku, svakom stupcu i na obje dijagonale kvadrata bude jednak.

		-16
-8		-3

2. Učenici Josip, Ivan i Marko posjetili su tvornicu olovaka. Na kraju posjete domaćini su donijeli kutiju olovaka i rekli da svaki od učenika uzme iz nje kao poklon olovaka koliko želi. Prvo je Josip uzeo $\frac{1}{3}$ olovaka iz kutije, ali se predomislio i 4 je olovke vratio natrag u nju. Nakon njega Ivan je iz kutije uzeo $\frac{1}{4}$ preostalih olovaka, no i on je 3 olovke vratio natrag. Zadnji je Marko uzeo $\frac{1}{2}$ preostalih olovaka iz kutije, ali je i on natrag vratio 2 olovke. Na kraju je u kutiji ostalo 17 olovaka. Koliko je olovaka u kutiji bilo na početku?

3. Odredi najveći troznamenkasti broj s međusobno različitim znamenkama, takav da je zbroj svih troznamenkastih brojeva koji se mogu zapisati pomoću sve tri znamenke toga broja jednak 2 220.

4. Konstruiraj trokut ABC ako je $|AB| = 6$ cm, $\sphericalangle CAB = 45°$ i $\sphericalangle ABC = 60°$, a zatim konstruiraj pravac p koji siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki D i dužinu $\overline{BC}$ u točki E tako da je $|DB| = |DE| = |CE|$. Konstrukciju obrazloži!

5. Zadan je trokut ABC s kutovima $\sphericalangle ABC = 15°$ i $\sphericalangle ACB = 30°$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrana je točka D tako da je pravac AD okomit na pravac AB. Dokaži da je $|BD| = 2|AC|$.

ŽN 2002.

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 6. RAZRED

ZA SVAKI OD ZADATAKA OVDJE SU DANI NEKI OD MOGUĆIH NAČINA RJEŠAVANJA. UKOLIKO JE UČENIK ZADATAK RJEŠAVAO NA DRUGAČIJI NAČIN, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE ADEKVATNO BODOVATI I OCIJENITI NJEGOV RAD.

$\boxed{1.}$ Radi lakšeg snalaženja, dijagonalu koja spaja gornje lijevo i donje desno polje kvadrata zvat ćemo prva dijagonala, a dijagonala koja spaja gornje desno i donje lijevo polje kvadrata bit će druga dijagonala kvadrata na slici. Označimo sa x broj koji se nalazi u središnjem polju kvadrata, tj. na presjeku dijagonala. 1 BOD

		-16
	x	
-8		-3

Zbroj brojeva na drugoj dijagonali tada iznosi $-16+x+(-8)=x-24$. 1 BOD
Budući da taj zbroj mora biti jednak zbroju brojeva u trećem retku, zaključujemo da u prazno polje u trećem retku treba upisati broj $x-24-[-8+(-3)]=x-13$. 1 BOD
Analogno, i zbroj brojeva u trećem stupcu mora iznositi $x-24$, te u prazno polje u trećem stupcu treba upisati broj $x-24-[-16+(-3)]=x-5$. 1 BOD
Na isti način, da bi i zbroj brojeva na prvoj dijagonali bio jednak $x-24$, u gornjem lijevom polju kvadrata mora pisati broj $x-24-[x+(-3)]=-21$. 1 BOD

Ostaje popuniti još dva polja kvadrata, poštujući isti princip. Tako u prazno polje u prvom retku treba upisati broj $x-24-[-21+(-16)]=x+13$, 1 BOD
a u preostalo prazno polje u prvom stupcu broj $x-24-[-21+(-8)]=x+5$, čime je kvadrat popunjen. 1 BOD
On izgleda ovako (slika dolje lijevo):

-21	$x+13$	-16
$x+5$	x	$x-5$
-8	$x-13$	-3

Primijetimo da je zbroj brojeva u drugom retku (a i u drugom stupcu) jednak $x+5+x+x-5=3x$. 1 BOD
Kako i on mora biti jednak $x-24$, imamo $3x=x-24$, odakle je $2x=-24$, tj. $x=-12$. 1 BOD
Sada konačno možemo ispuniti kvadrat (slika desno). 1 BOD

-21	1	-16
-7	-12	-17
-8	-25	-3

.... UKUPNO 10 BODOVA

$\boxed{2.}$ <u>1. način.</u> Zadatak rješavamo čitajući ga unatrag, tj. rekonstrukcijom akcija trojice učenika redom od posljednje prema prvoj. Preme pretpostavci, nakon svih akcija (vađenja olovaka iz kutije i vraćanja natrag) u kutiji je ostalo 17 olovaka. Posljednju akciju izvršio je Marko, koji je u kutiju vratio 2 olovke. To znači da se prije toga u kutiji nalazilo $17-2=15$ olovaka. 1 BOD
Toliko ih je ostalo nakon Markove prethodne akcije, kada je iz kutije izvadio polovinu olovaka. Prema tome, prije Marka u kutiji je bilo $2\cdot 15=30$ olovaka. 1 BOD
U akciji neposredno prije Markovih dviju Ivan je u kutiju vratio 3 olovke, te zaključujemo da ih je prije toga u kutiji bilo $30-3=27$. 1 BOD
No, kako je Ivan prethodno iz kutije izvadio $\frac{1}{4}$ olovaka, u njoj je ostalo $\frac{3}{4}$ prethodnog broja olovaka. 1 BOD
Dakle, 27 olovaka jednako je $\frac{3}{4}$ prethodnog broja olovaka, pa se prije Ivanovih akcija u kutiji nalazilo $\frac{4}{3}\cdot 27=36$ olovaka. 2 BODA
Ostalo je još rekonstruirati Josipove akcije. U svojoj zadnjoj akciji on je u kutiju vratio 4 olovke, pa ih je prije toga u njoj bilo $36-4=32$, 1 BOD
koliko ih je ostalo nakon što je Josip iz kutije izvadio $\frac{1}{3}$ početnog broja olovaka. Prema tome, $\frac{2}{3}$ početnog broja olovaka u kutiji iznosi 32. 1 BOD
Konačno, odavde slijedi da je u kutiji na početku bilo $\frac{3}{2}\cdot 32=48$ olovaka. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

<u>2. način.</u> Zadatak možemo riješiti i čitajući ga pravim redoslijedom akcija trojice učenika, što vodi na postavljanje i rješavanje linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom. Označimo sa x početni broj olovaka u kutiji. 1 BOD
Iz kutije je prvo Josip uzeo $\frac{1}{3}$ olovaka, što znači da su u njoj ostale $\frac{2}{3}$ početnog broja olovaka, tj. $\frac{2}{3}x$. 1 BOD
No, kako je Josip nakon toga 4 olovke vratio natrag, u kutiji su poslije Josipa ostale $\frac{2}{3}x+4$ olovke. 1 BOD
Sljedeći je Ivan uzeo $\frac{1}{4}$ olovaka, tj. u kutiji je ostavio $\frac{3}{4}$, odnosno $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}x+4\right)=\frac{1}{2}x+3$ olovke. 1 BOD
Budući da je Ivan 3 olovke vratio natrag, nakon njega u kutiji je ostalo $\frac{1}{2}x+3+3=\frac{1}{2}x+6$ olovaka. 1 BOD
Zadnji je olovke uzimao Marko, i to polovinu preostalih u kutiji. Zato je u kutiji ostala polovina olovaka, odnosno $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x+6\right)=\frac{1}{4}x+3$ olovke. 1 BOD
I Marko je 2 olovke vratio natrag, pa je na kraju u kutiji ostalo $\frac{1}{4}x+3+2=\frac{1}{4}x+5$ olovaka. 1 BOD
Prema uvjetima zadatka, taj je broj jednak 17, tj. vrijedi $\frac{1}{4}x+5=17$, 1 BOD
odakle je $\frac{1}{4}x=12$, tj. $x=48$. 2 BODA
Dakle, u kutiji je na početku bilo 48 olovaka.
.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka su $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ tri međusobno različite znamenke, takve da je $a > b > c$. S obzirom na znamenku c, razlikujemo dva slučaja: $c \neq 0$ i $c = 0$. Razmotrimo ih redom.

(a) $c \neq 0$. U ovom slučaju postoji 6 troznamenkastih brojeva koji se mogu zapisati pomoću sve tri znamenke a, b i c. To su: $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ i $\overline{cba}$, a najveći među njima je $\overline{abc}$. 1 BOD

Kako bismo što lakše izračunali zbroj ovih 6 brojeva, uočimo da se svaka od znamenaka a, b i c u točno dva broja pojavljuje kao znamenka stotica, dva puta kao znamenka desetica i dva puta kao znamenka jedinica, tj. 1 BOD

$$\begin{aligned}\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} &= 2 \cdot 100a + 2 \cdot 100b + 2 \cdot 100c + 2 \cdot 10a + 2 \cdot 10b + 2 \cdot 10c + 2a + 2b + 2c \\ &= 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c).\end{aligned}$$ 2 BODA

Prema pretpostavci, ovaj zbroj mora biti jednak $2\,220 = 222 \cdot 10$, što znači da je $a + b + c = 10$. 1 BOD

Budući da tražimo najveći broj $\overline{abc}$ $(a > b > c > 0)$ za kojeg ovo vrijedi, uzmimo prvo najveću moguću znamenku a, tj. $a = 9$. Tada je $9 + b + c = 10$, tj. $b + c = 1$, što je nemoguće postići s $b > c > 0$. Dakle, niti jedan broj oblika $\overline{9bc}$ $(b > c > 0)$ nema traženo svojstvo. 1 BOD

Sada probamo s $a = 8$. Ovdje je $8 + b + c = 10$, tj. $b + c = 2$, što opet nije moguće ostvariti sa znamenkama $b > c > 0$. To znači da ne postoji broj oblika $\overline{8bc}$ $(b > c > 0)$ koji zadovoljava postavljeni uvjet. 1 BOD

Zato nastavljamo s $a = 7$. Iz $7 + b + c = 10$ slijedi da je $b + c = 3$, što uz $b > c > 0$ možemo postići jedino s $b = 2$ i $c = 1$. Prema tome, 721 je najveći broj, s međusobno različitim znamenkama, kojem niti jedna znamenka nije 0 i koji zadovoljava postavljeni uvjet. 1 BOD

Ostaje razmotriti drugi slučaj.

(b) $c = 0$. Jedini troznamenkasti brojevi koji se mogu napisati pomoću sve tri znamenke a, b i 0 su: $\overline{ab0}$, $\overline{a0b}$, $\overline{ba0}$ i $\overline{b0a}$, a najveći među njima je $\overline{ab0}$. 1 BOD

Zbroj tih brojeva je

$$\overline{ab0} + \overline{a0b} + \overline{ba0} + \overline{b0a} = 100a + 10b + 100a + b + 100b + 10a + 100b + a = 211a + 211b = 211(a + b).$$

Budući da 211 nije djeliteljem broja $2\,220$, ovaj slučaj ne može nastupiti. 1 BOD

Iz svega zaključujemo da je 721 najveći broj s traženim svojstvom.

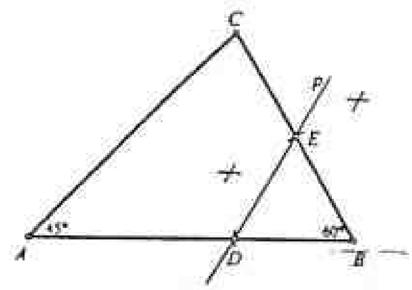
.... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Pronađe li učenik točno rješenje, tj. broj 721, ali propusti analizirati slučaj (b), za rješenje zadatka može dobiti najviše 8 bodova.

4. Zadatak ćemo riješiti na dva različita načina. Rješenje se u oba slučaja sastoji od četiri koraka: analize konstrukcije, same konstrukcije, dokaza konstrukcije i rasprave.

1. način.

Analiza konstrukcije. Skica 1 BOD



Neka su trokut ABC, pravac p, te točke D i E kao u tekstu zadatka. Zbog jednakosti $|DB| = |DE|$, trokut DBE je jednakokračan. 1 BOD

Zato je $\sphericalangle DEB = \sphericalangle DBE = \sphericalangle ABC = 60°$, 1 BOD

odakle je i $\sphericalangle BDE = 180° - \sphericalangle DEB - \sphericalangle DBE = 60°$. 1 BOD

Dakle, trokut DBE je jednakostraničan, te je $|BE| = |DB| = |DE|$. 1 BOD

Iz pretpostavke da je $|DE| = |CE|$ slijedi jednakost $|BE| = |CE|$, te je točka E polovište dužine $\overline{BC}$. 1 BOD

Sada je jasno kako ćemo izvesti konstrukciju.

Konstrukcija. Prvo konstruiramo trokut ABC. Njegova je konstrukcija jednostavna jer mu je zadana duljina jedne stranice i veličine dva kuta uz tu stranicu. 2 BODA

Nakon toga konstruiramo točku E kao polovište dužine $\overline{BC}$, tj. presjek dužine $\overline{BC}$ i njezine simetrale. 1 BOD

Konačno, točka D je presjek kružnice $k(B, |BE|)$ i dužine $\overline{AB}$, a p je pravac točkama D i E. 1 BOD

Dokaz konstrukcije. Prema konstrukciji imamo $|BE| = |CE| = |DB|$, pa je trokut DBE jednakokračan. No, kako za kut među njegovim krakovima $\overline{BD}$ i $\overline{BE}$ vrijedi $\sphericalangle DBE = \sphericalangle ABC = 60°$, trokut DBE je jednakostraničan. Zato je $|DE| = |DB| = |CE|$, što znači da su D i E tražene točke.

Rasprava. Prema poučku K – S – K o sukladnosti trokuta, trokut ABC je (do na sukladnost) jednoznačno određen elementima danim u zadatku, a iz analize i dokaza konstrukcije jasno je da su točke D i E jedinstvene.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. način.

Analiza konstrukcije. Skica 1 BOD

Pretpostavimo da su trokut ABC, pravac p, te točke D i E kao u tekstu zadatka. Zbog jednakosti $|DB| = |DE|$, trokut DBE je jednakokračan. 1 BOD

Zato je $\sphericalangle DEB = \sphericalangle DBE = \sphericalangle ABC = 60°$, 1 BOD

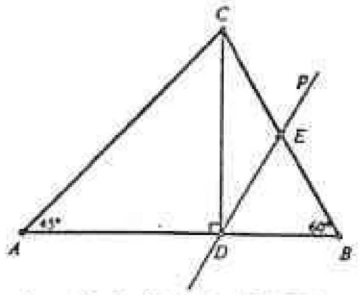
odakle dobivamo $\sphericalangle EDB = 180° - \sphericalangle DEB - \sphericalangle DBE = 60°$ i $\sphericalangle DEC = 180° - \sphericalangle DEB = 120°$. 1 BOD

No, i trokut DEC je jednakokračan ($|DE| = |CE|$), te je $\sphericalangle DCE = \sphericalangle CDE = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle DEC) = 30°$. 1 BOD

Odavde je $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CDE + \sphericalangle EDB = 90°$, pa je pravac CD okomit na pravac AB. To znači da je točka D nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC. 1 BOD

Sada je jasan tok konstrukcije.

ŽN 2002. – 6. r. A11



Konstrukcija. Najprije pomoću zadanih elemenata konstruiramo trokut ABC. Njegova je konstrukcija elementarna jer mu je zadana duljina stranice i veličine dva kuta uz tu stranicu. 2 BODA

Nakon toga konstruiramo okomicu iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC. Točka D je nožište te okomice. 1 BOD

Točku E sada lagano odredimo kao presjek kružnice $k(D, |DB|)$ i stranice $\overline{BC}$. 1 BOD

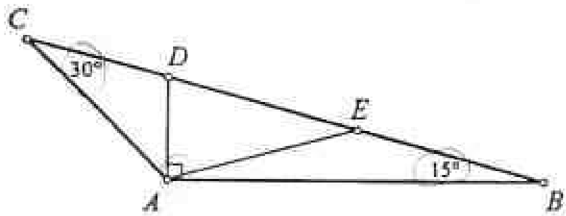
Dokaz konstrukcije. Po konstrukciji je $|DB| = |DE|$, pa je trokut DBE jednakokračan. Budući da je $\measuredangle DBE = 60°$, slijedi da je i $\measuredangle BDE = 60°$, odakle je $\measuredangle CDE = \measuredangle CDB - \measuredangle BDE = 30°$. S druge strane, iz pravokutnog trokuta CDB imamo $\measuredangle DCE = \measuredangle DCB = 180° - \measuredangle CDB - \measuredangle DBC = 30°$, pa je trokut CDE jednakokračan, s krakovima $\overline{CE}$ i $\overline{DE}$. Zato je $|CE| = |DE| = |DB|$, čime smo dokazali da su konstruirane točke upravo one koje smo tražili.

Rasprava. Trokut ABC do na sukladnost je jedinstven po poučku K – S – K o sukladnosti trokuta, a točke D i E jedinstvene su po analizi i dokazu konstrukcije.

.... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Od učenika se očekuje i konstrukcija i objašnjenje postupka (analiza). Sama konstrukcija bez objašnjenja nosi samo 4 boda. Dokaz konstrukcije i provođenje rasprave o broju rješenja od učenika se ne očekuju.

5. Skica 1 BOD



Na stranici $\overline{BC}$ odaberimo točku E tako da je $\measuredangle EAB = \measuredangle ABE = \measuredangle ABC = 15°$. 2 BODA

Trokut ABE tada je jednakokračan, tj. $|AE| = |BE|$. 1 BOD

Također, $\measuredangle AEC = \measuredangle EAB + \measuredangle ABE = 30°$ jer je to vanjski kut kod vrha E trokuta ABE. 1 BOD

Sada je $\measuredangle AEC = \measuredangle ACB = \measuredangle ACE = 30°$, pa zaključujemo da je i trokut CAE jednakokračan, tj. da vrijedi jednakost $|AE| = |AC|$. 1 BOD

Iskoristimo li činjenicu da je kut $\measuredangle DAB$ pravi, dobivamo $\measuredangle DAE = \measuredangle DAB - \measuredangle EAB = 75°$. 1 BOD

Zato u trokutu DAE imamo $\measuredangle ADE = 180° - \measuredangle DAE - \measuredangle AED = 75°$, 1 BOD

pa je i taj trokut jednakokračan, odnosno vrijedi jednakost $|DE| = |AE|$. 1 BOD

Prema tome, dobili smo jednakosti $|AC| = |AE| = |BE| = |DE|$, odakle je $|BD| = |BE| + |DE| = 2|AC|$, što je i trebalo dokazati. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA