MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

7. ožujka 2003.

I. razred

1. Jedinica za asfaltiranje sastoji se od određenog broja radnika i pripadne mehanizacije. Tri jedinice asfaltirale su 20 km autoceste za 10 dana. Koliko još jedinica treba uključiti da radovi budu gotovi za 15 dana ako je preostalo 50 km autoceste za asfaltiranje?

2. Dan je jednakokračan trokut ABC kojemu je kut uz vrh A jednak 120°. Okomica iz tog vrha na krak trokuta dijeli trokut na dva trokuta od kojih tupokutan ima polumjer upisane kružnice 1. Kolika je površina trokuta ABC?

3. Odredite sumu

$$\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\cdots+\frac{2}{1997\cdot 2000}+\frac{2}{2000\cdot 2003}\,.$$

4. Ako za realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1\,,$$

dokažite da je

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0\,.$$

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.* Neka je d duljina asfaltirane autoceste,
x broj jedinica koje su bile uključene u asfaltiranje,
y broj dana koji su bili potrebni za asfaltiranje i
a konstanta proporcionalnosti. Tada vrijedi

$$d = a \cdot x \cdot y \,.$$ 5 bodova

Tokom prva tri dana asfaltiranja bilo je:
$d = 20$, $x = 3$, $y = 10$, odakle slijedi

$$a = \frac{d}{x \cdot y} = \frac{2}{3} \,.$$ 10 bodova

U preostalom dijelu asfaltiranja je:
$d = 50$, $y = 15$, odakle se dobiva

$$x = \frac{d}{a \cdot y} = \frac{50}{\frac{2}{3} \cdot 15} = 5 \,.$$ 8 bodova

Treba ukupno 5 jedinica, što znači da treba uključiti još dvije jedinice. 2 boda

Drugo rješenje. Prikažimo podatke i međurezultate
u obliku tabele: ideja - 5 bodova

broj jedinica	km	dani
3	20	10
?	50	15
3	20	10
3	10	5
1	10	15
5	50	15

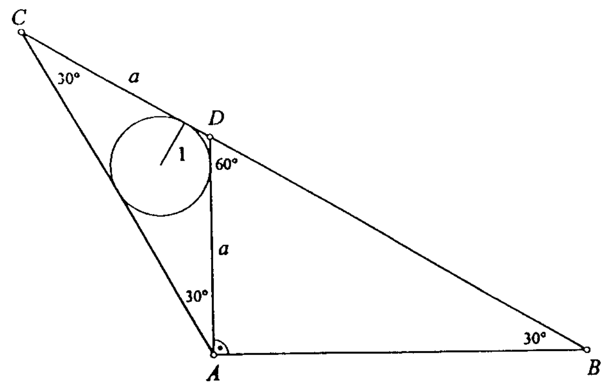
Znamo da više dana znači više km (km i dani su direktno proporcionalni), 2 boda
pa će 3 jedinice asfaltirati 10 km za 5 dana; 4 boda

broj jedinica i broj dana su obrnuto proporcionalni, 2 boda
zato će 1 jedinica asfaltirati 10 km za 15 dana; 4 boda

kako je broj jedinica direktno proporcionalan broju km, 2 boda
5 jedinica će asfaltirati 50 km za 15 dana. 4 boda

Dakle, za asfaltiranje 50 km za 15 dana treba 5 jedinica, a kako su tri
već na terenu, treba uključiti još dvije jedinice. 2 boda

2. *Prvo rješenje.* Uz oznaku $a = |AD| = |CD|$ i $r = 1$ – polumjer
trokutu ACD upisane kružnice, dobivamo $|AC| = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.
Površina trokuta ACD jednaka je površini jednakostraničnog
trokuta stranice a, a možemo ju prikazati i pomoću duljina
stranica i polumjera upisane kružnice trokuta ACD.



Dakle,

$$P(ACD) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot r(a + a + a\sqrt{3}) \,, \qquad \text{10 bodova}$$

tj.

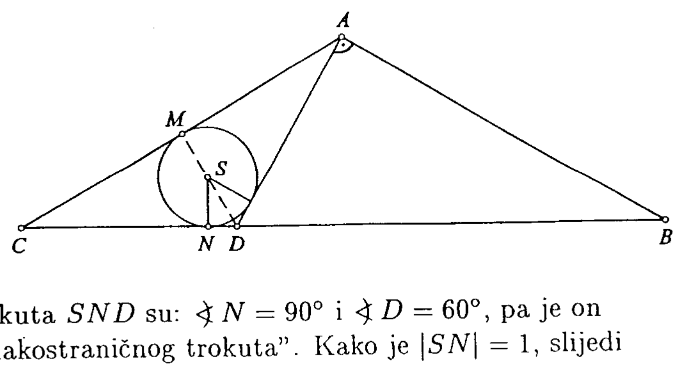
$$a = \frac{2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \,.$$

Površina trokuta ABC jednaka je površini jednakostraničnog trokuta stranice $a\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} P(ABC) &= \frac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ &= (2+\sqrt{3})^2\sqrt{3} = 7\sqrt{3} + 12 \,. \end{aligned}$$

15 bodova

Drugo rješenje. Neka je S središte kružnice upisane u tupokutan trokut ACD, N diralište upisane mu kružnice i stranice $\overline{CD}$, a M diralište te kružnice i stranice $\overline{AC}$.



Kutovi trokuta SND su: $\measuredangle N = 90°$ i $\measuredangle D = 60°$, pa je on "polovica jednakostraničnog trokuta". Kako je $|SN| = 1$, slijedi $|SD| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 5 bodova

Odavde slijedi:

$$
\begin{aligned}
|MD| &= |MS| + |SD| = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,, && \text{4 boda}\\
|AD| &= 2|MD| = \frac{2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\,, && \text{4 boda}\\
|AM| &= |MD|\sqrt{3} = 2+\sqrt{3}\,, && \text{4 boda}\\
|AC| &= 2|AM| = 2(2+\sqrt{3})\,, && \text{4 boda}\\
P(ABC) &= \frac{|AC|^2\sqrt{3}}{4} = (2+\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} = 12 + 7\sqrt{3}\,. && \text{4 boda}
\end{aligned}
$$

3. Danu sumu možemo prikazati na ovaj način:

$$
\begin{aligned}
& \frac{2}{2\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 8} + \ldots + \frac{2}{1997\cdot 2000} + \frac{2}{2000\cdot 2003}\\
=\ & \frac{2}{3}\left(\frac{5-2}{2\cdot 5} + \frac{8-5}{5\cdot 8} + \ldots + \frac{2000-1997}{1997\cdot 2000} + \frac{2003-2000}{2000\cdot 2003}\right)\\
=\ & \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{1997} - \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} - \frac{1}{2003}\right)\\
=\ & \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2003}\right) = \frac{667}{2003}\,.
\end{aligned}
$$

25 bodova

4. Jednakost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$$

množimo redom s a, b, c i dobivene jednakosti zbrojimo. 10 bodova
Dobiva se

$$
\begin{aligned}
& \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\\
=\ & a + b + c - \frac{ab+bc}{c+a} - \frac{ac+bc}{a+b} - \frac{ab+ac}{b+c}\\
=\ & 0.
\end{aligned}
$$

15 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

7. ožujka 2003.

II. razred

1. Na skupu realnih brojeva definirana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2-2x+1}} .$$

Odredite $f(1) + f(2) + \ldots + f(2003)$.

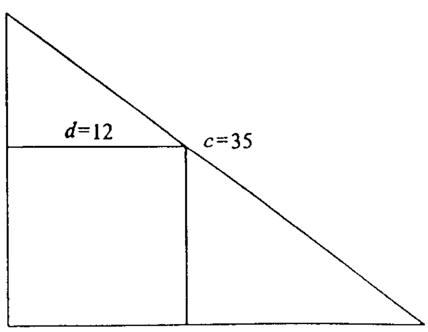
2. U jednakostraničnom trokutu ABC dane su točke $D \in \overline{AB}$ i $E \in \overline{BC}$ takve da je $|AD| = \frac{1}{3}|AB|$ i $|BE| = \frac{1}{3}|BC|$. Pravci AE i CD sijeku se u točki P. Koliki je kut $\sphericalangle BPC$?

3. Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi modula 1. Dokažite da je

$$\frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2}$$

realan broj.

4. U pravokutan trokut s hipotenuzom duljine $c = 35$ upisan je kvadrat sa stranicom duljine $d = 12$, kao na slici. Odredite duljine kateta tog trokuta.



Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Kako je

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{(\sqrt[3]{x+1})^3-(\sqrt[3]{x-1})^3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right), \end{aligned}$$

15 bodova

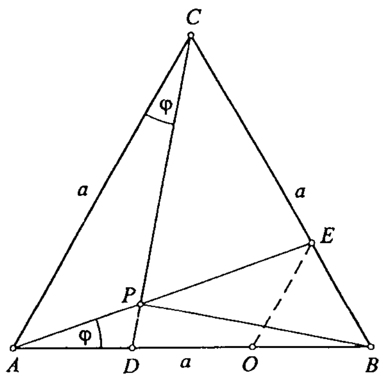
imamo

$$\begin{aligned} & f(1)+f(2)+\ldots+f(2002)+f(2003) \\ =\ & \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{1}+\ldots+\sqrt[3]{2003}-\sqrt[3]{2001}+\sqrt[3]{2004}-\sqrt[3]{2002}\right) \\ =\ & \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2004}+\sqrt[3]{2003}-1\right). \end{aligned}$$

10 bodova

2. Uz oznake kao na slici imamo:

$$\sphericalangle CPE = \sphericalangle PCA + \sphericalangle CAP = \sphericalangle EAB + \sphericalangle CAE = 60^\circ .$$ 5 bodova



Odavde je $\sphericalangle EPD = 120^\circ$, a kako je $\sphericalangle DBE = 60^\circ$, četverokut $DBEP$ je tetivni. Neka je O polovište dužine $\overline{BD}$. Tada je $|OB| = |OD| = |OE| = \frac{1}{3}a$, pa je O središte kružnice opisane četverokutu $DBEP$. 10 bodova

Zato je

$$\sphericalangle EPB = \frac{1}{2}\sphericalangle EOB = \frac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ.$$ 5 bodova

Traženi kut je

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle CPE + \sphericalangle EPB = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ\,. \qquad \text{5 bodova}$$

3. *Prvo rješenje.* Prema uvjetu zadatka je $1 = |z_1|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1$, odakle je $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$. Analogno je $\bar{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$. 5 bodova

Neka je

$$z = \frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2}\,.$$

Tada je

$$\bar{z} = \frac{1 - \bar{z}_1\bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} = \frac{1 - \dfrac{1}{z_1 z_2}}{\dfrac{1}{z_1} - \dfrac{1}{z_2}} = \frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2}\,. \qquad \text{15 bodova}$$

Kako je $\bar{z} = z$, traženi broj je realan. 5 bodova

Drugo rješenje. Stavimo $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$. Zbog $|z_1| = |z_2| = 1$ vrijedi $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. 5 bodova

Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2} &= \frac{1 - ac + bd - i(ad + bc)}{(a - c) + i(b - d)} \cdot \frac{(a - c) - i(b - d)}{(a - c) - i(b - d)} \\
&= \frac{a - c - a^2c + ac^2 + ad^2 - b^2c}{(a - c)^2 + (b - d)^2} \\
&\quad + \frac{i(b - d + a^2d - bc^2 + b^2d - bd^2)}{(a - c)^2 + (b - d)^2}\,.
\end{aligned}$$

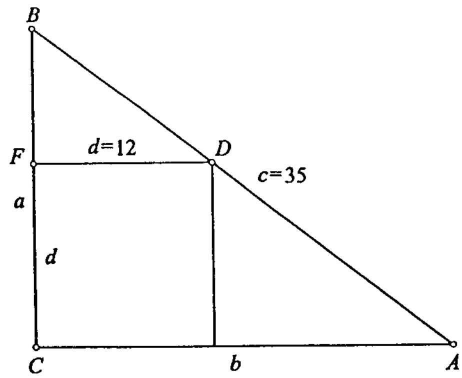
15 bodova

Treba provjeriti da je imaginarni dio jednak nuli:

$$b - d + a^2d - bc^2 + b^2d - bd^2 = b - d + d(a^2 + b^2) - b(c^2 + d^2) = b - d + d - b = 0\,. \qquad \text{5 bodova}$$

4. Ako su a i b katete i $c = 35$ hipotenuza, vrijedi

$$a^2 + b^2 = 35^2 = 1225$$ 5 bodova



S druge strane, iz sličnosti trokuta ABC i DBF dobivamo

$$\frac{a}{b} = \frac{a-d}{d} \implies d(a+b) = ab \quad \text{tj.} \quad 12(a+b) = ab.$$ 5 bodova

Riješimo sustav $a^2 + b^2 = 1225, \quad 12(a+b) = ab$. Kako je $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, stavimo $x = a + b$, $y = ab$. Tada je

$$x^2 - 2y = 1225, \quad 12x = y \implies x^2 - 24x - 1225 = 0 \, .$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$x_1 = 49, \quad x_2 = -25 \, , \quad \text{i dalje,} \quad y_1 = 588 \, , \quad y_2 = -300 \, .$$

Zadovoljava samo $x_1 = 49$ i $y_1 = 588$. 5 bodova

Sada je $a + b = 49$ i $ab = 588$, pa su a i b rješenja kvadratne jednadžbe

$$t^2 - 49t + 588 = 0 \, .$$

Slijedi $a_1 = 21$, $b_1 = 28$ ili $a_2 = 28$, $b_2 = 21$, pa su duljine kateta danog trokuta 21 i 28. 10 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

7. ožujka 2003.

III. razred

1. Riješite nejednadžbu

$$2 \cdot 125^x - 3 \cdot 50^x - 9 \cdot 20^x + 10 \cdot 8^x \le 0\ .$$

2. Odredite sve parove (x, y) realnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\operatorname{tg}^2 x + 2y \cos 4x \cdot \operatorname{tg} x + y^2 = 0\ .$$

3. U trokutu ABC duljine stranica su $|AB| = 20$, $|AC| = 21$ i $|BC| = 29$. Točke D i E su na stranici $\overline{BC}$ takve da je $|BD| = 8$ i $|EC| = 9$. Odredite veličinu kuta $\sphericalangle DAE$.

4. Ako su $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2003}$ cijeli brojevi i $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{2003}$ ti isti brojevi poredani na neki drugi način, dokažite da je produkt

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_{2003} + b_{2003})$$

paran broj.

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Podijelimo li jednadžbu s 8^x, dobijemo

$$2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} - 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 9 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{x} + 10 \leq 0.$$

Supstitucijom $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ dobijemo nejednadžbu

$$2t^3 - 3t^2 - 9t + 10 \leq 0 \,.$$ 5 bodova

Rastavimo lijevu stranu nejednadžbe na faktore:

$$\begin{aligned} 2t^3 - 3t^2 - 9t + 10 &= (2t^3 - 2t^2) - (t^2 - t) - (10t - 10) \\ &= 2t^2(t-1) - t(t-1) - 10(t-1) = (t-1)(2t^2 - t - 10) \\ &= (t-1)(2t-5)(t+2) \,. \end{aligned}$$

10 bodova

Njezino rješenje je $t \in (-\infty, -2] \cup \left[1, \frac{5}{2}\right]$. No, kako je $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x > 0$, zadovoljava samo $\left(\frac{5}{2}\right)^x \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$. Iz $1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq \frac{5}{2}$ slijedi $x \in [0, 1]$. 10 bodova

2. *Prvo rješenje.* Promatrajmo danu jednadžbu kao kvadratnu jednadžbu po y. Tada je

$$y_{1,2} = -\operatorname{tg} x \cdot \cos 4x \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 4x - \operatorname{tg}^2 x} \,.$$ 5 bodova

Da bi rješenja bila realna mora biti

$$\operatorname{tg}^2 x(\cos^2 4x - 1) \geq 0 \,,$$

što je moguće samo za $\operatorname{tg} x = 0$ ili $\cos^2 4x = 1$, tj. $x = k\pi$ ili $\cos 4x = \pm 1$, odnosno $x = \frac{k\pi}{4}$, $y = -\operatorname{tg} x \cdot \cos 4x$. 4 boda

Za $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x$ nije definiran. 4 boda

Stoga ostaju slučajevi:

$x = k\pi \quad \ldots \quad y = 0, \quad k \in \mathbf{Z}$, 4 boda

$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \ldots \quad y = 1, \quad k \in \mathbf{Z}$, 4 boda

$x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad \ldots \quad y = -1, \quad k \in \mathbf{Z}$. 4 boda

Drugo rješenje. Promatramo li ovu jednadžbu kao kvadratnu jednadžbu po $\operatorname{tg} x$, dobivamo

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2} = -y\cos 4x \pm \sqrt{y^2\cos^2 4x - y^2}\,.$$

Da bi rješenja bila realna, mora biti $y^2(\cos^2 4x - 1) \geq 0$, a to je moguće samo ako je $y = 0$ ili $\cos 4x = \pm 1$. 5 bodova

1° $y = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg} x = 0 \;\Rightarrow\; x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. 4 boda

2° $\cos 4x = 1 \;\Rightarrow\; 4x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \;\Rightarrow\; x = \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$:

a) $k = 2m,\ m \in \mathbf{Z} \;\Rightarrow\; x = m\pi,\ m \in \mathbf{Z} \;\Rightarrow\; y^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$. 4 boda

b) $k = 2m+1,\ m \in \mathbf{Z} \;\Rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2} + m\pi,\ m \in \mathbf{Z}$, pa $\operatorname{tg} x$ nije definiran. 4 boda

3° $\cos 4x = -1 \;\Rightarrow\; 4x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \;\Rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$:

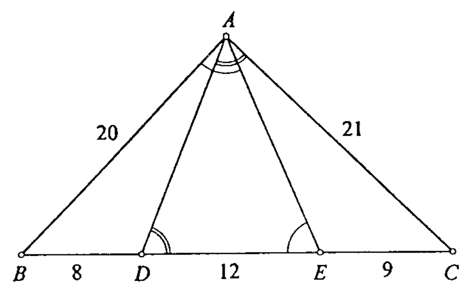
a) $k = 2m,\ m \in \mathbf{Z} \;\Rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{4} + m\pi,\ m \in \mathbf{Z} \;\Rightarrow\; 1^2 + 2y\cdot(-1)\cdot 1 + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = 1$. 4 boda

b) $k = 2m+1,\ m \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + m\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4} + m\pi,\ m \in \mathbf{Z}$ $\Rightarrow (-1)^2 + 2y\cdot(-1)\cdot(-1) + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = -1$. 4 boda

Dakle, $(x,y) \in \left\{(m\pi, 0), \left(\dfrac{\pi}{4} + m\pi, 1\right), \left(\dfrac{3\pi}{4} + m\pi, -1\right) : m \in \mathbf{Z}\right\}$.

3. *Prvo rješenje.* Uočimo da je trokut pravokutan ($\sphericalangle BAC = 90^\circ$) jer je $20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841 = 29^2$. 5 bodova

Kako je $|AB| = |BE|$ i $|AC| = |CD|$ slijedi $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BEA$ i $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA$. 5 bodova



Stoga je

$$\begin{aligned}
\sphericalangle DAE &= \sphericalangle BAE + \sphericalangle CAD - \sphericalangle BAC \\
&= \sphericalangle BEA + \sphericalangle CDA - \sphericalangle BAC \\
&= \sphericalangle DEA + \sphericalangle EDA - \sphericalangle BAC \\
&= 180^\circ - \sphericalangle DAE - \sphericalangle BAC\,.
\end{aligned}$$

10 bodova

Slijedi, $2\sphericalangle DAE + \sphericalangle BAC = 180^\circ$. Kako je $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, konačno je $\sphericalangle DAE = 45^\circ$. 5 bodova

Drugo rješenje. Koristeći kosinusov poučak dobivamo:

$$\triangle ABC \quad \ldots \quad \cos\beta = \frac{20^2+29^2-21^2}{2\cdot 20\cdot 29} = \frac{20}{29},$$ 5 bodova

$$\triangle ABC \quad \ldots \quad \cos\gamma = \frac{21^2+29^2-20^2}{2\cdot 21\cdot 29} = \frac{21}{29},$$ 5 bodova

$$\triangle ABD \quad \ldots \quad |AD|^2 = 20^2+8^2-2\cdot 8\cdot 20\cdot\frac{20}{29} = \frac{84^2}{29}$$

$$\text{tj. } |AD| = \frac{84}{\sqrt{29}},$$ 5 bodova

$$\triangle ACE \quad \ldots \quad |AE|^2 = 21^2+9^2-2\cdot 9\cdot 21\cdot\frac{21}{29} = \frac{(60\sqrt{2})^2}{29}$$

$$\text{tj. } |AE| = \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{29}},$$ 5 bodova

$$\triangle ADE \quad \ldots \quad \cos\sphericalangle DAE = \frac{\frac{84^2}{29}+\frac{(60\sqrt{2})^2}{29}-12^2}{2\cdot\frac{84}{\sqrt{29}}\cdot\frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{29}}}$$

$$= \frac{84^2+2\cdot 60^2-12^2\cdot 29}{2\cdot 84\cdot 60\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$ 5 bodova

Dakle, $\sphericalangle DAE = 45^\circ$.

4. Pretpostavimo da je produkt neparan. Tada su svi njegovi faktori a_i+b_i neparni. Zato su brojevi a_i, b_i različitog pariteta. Tada je za svaki parni a_i broj b_i neparan, a za svaki neparan a_i broj b_i je paran. To znači da među zadanim brojevima mora biti isti broj parnih i neparnih brojeva, što je nemoguće jer ih ukupno ima 2003, a to je neparan broj. 25 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

7. ožujka 2003.

IV. razred

1. Nad stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, kvadrata $ABCD$ konstruirani su s vanjske strane jednakostranični trokuti BCE, CDF, DAG. Odredite, kao funkciju duljine a stranice kvadrata, volumen tijela koje nastaje rotacijom lika $BECFDGA$ oko pravca AB .

2. Neka je p realan broj. Odredite rješenja x_1, x_2, x_3 jednadžbe

$$x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0 ,$$

ako je poznato da su ona uzastopni članovi aritmetičkog niza.

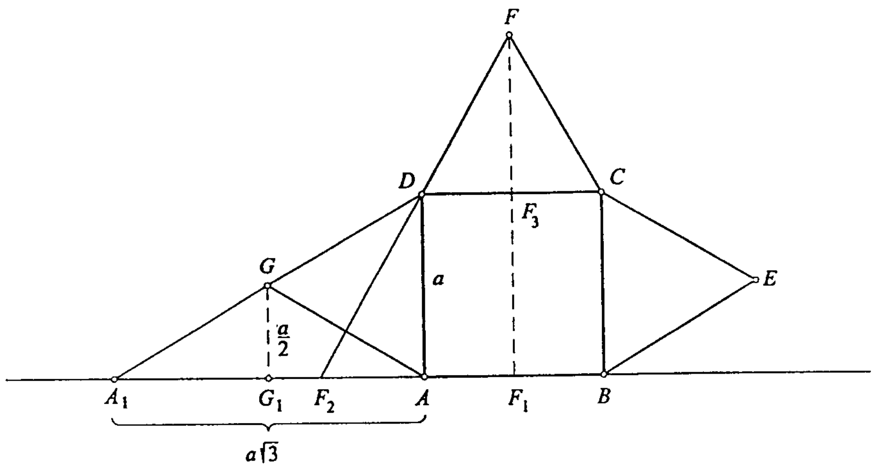
3. Ako su α i β kutovi trokuta, dokažite nejednakost

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} \geq \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} .$$

4. Nađite sve prirodne brojeve djeljive s 90 koji imaju točno 20 djelitelja.

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Traženi volumen V jednak je dvostrukom volumenu V_1 tijela koje nastaje rotacijom lika AF_1FDG oko pravca AB. Volumen V_1 jednak je zbroju volumena V_2 tijela koje nastaje rotacijom trokuta ADG i volumena V_3 tijela koje nastaje rotacijom lika AF_1FD. 3 boda



Volumen V_2 jednak je razlici volumena stošca koji nastaje rotacijom trokuta A_1AD i dvostrukog volumena stošca koji nastaje rotacijom trokuta G_1AG. Dakle,

$$V_2 = \frac{a^2\pi a\sqrt{3}}{3} - 2\cdot\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi\frac{a\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{4}.$$ 10 bodova

Volumen V_3 je jednak razlici volumena stožaca koji nastaju rotacijom trokuta F_2F_1F i F_2AD. Ovdje je $|FF_1| = a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, a iz sličnosti trokuta F_2AD i DF_3F dobiva se $|F_2A| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, odnosno $|F_1F_2| = a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)$. Sada se dobiva

$$\begin{aligned}
V_3 &= \frac{|F_1F|^2\pi\cdot|F_1F_2|}{3} - \frac{|AD|^2\pi|F_2A|}{3}\\
&= \frac{\left[a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2\pi\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}+\frac{a}{2}\right)}{3} - \frac{a^2\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}}{3}\\
&= a^3\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{8}\right).
\end{aligned}$$

10 bodova

Konačno se dobije,

$$V = 2V_1 = 2(V_2 + V_3) = a^3\pi \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{5}{4}\right) . \qquad \text{2 boda}$$

2. Prema Vièteovim formulama je

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2p \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= -p \\ x_1x_2x_3 &= -10 . \end{aligned}$$

Kako su x_1, x_2, x_3 uzastopni članovi aritmetičkog niza, možemo pisati

$$x_1 = x - d , \qquad x_2 = x , \qquad x_3 = x + d ,$$

i uvrštavanjem u gornje izraze dobivamo:

$$\begin{aligned} 3x &= -2p \\ (x-d)x + x(x+d) + (x+d)(x-d) &= -p \\ (x-d)x(x+d) &= -10 . \end{aligned} \qquad (*)$$

10 bodova

Preostaje još riješiti ovaj sistem jednadžbi. Iz prve je $x = -\frac{2p}{3}$, pa iz treće dobivamo

$$x^2 - d^2 = -\frac{10}{x} = \frac{15}{p} ,$$

a iz druge,

$$\begin{aligned} (x-d)x + x(x+d) + \frac{15}{p} &= -p \\ 2x^2 + \frac{15}{p} + p &= 0 \\ 2 \cdot \frac{4p^2}{9} + \frac{15}{p} + p &= 0 \\ 8p^3 + 9p^2 + 135 &= 0 . \end{aligned}$$

5 bodova

Tražimo cjelobrojna rješenja ove jednadžbe, a to moraju biti djelitelji od 135. Jedno rješenje je $p = -3$. Dijeljenjem dobivamo

$$(8p^3 + 9p^2 + 135) : (p + 3) = 8p^2 - 15p + 45 .$$

Preostaje kvadratna jednadžba $8p^2 - 15p + 45 = 0$ koja nema realnih rješenja.

Za $p = -3$ je $x = 2$, a iz $x^2 - d^2 = -5$ je $d^2 = 9$, tj. $d = \pm 3$. Rješenja jednadžbe su -1, 2, 5, a jednadžba glasi

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0 . \qquad \text{10 bodova}$$

Napomena. Iz $(*)$ se mogu pogoditi rješenja jednadžbe, ali tada treba obrazložiti da je to jedina mogućnost.

3. *Prvo rješenje.*

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\cos\beta}=\frac{1}{2}(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta)\ .$$

Korištenjem funkcije dvostrukog kuta i adicionu formulu za ctg, dana nejednakost postaje

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{\mathrm{ctg}^2\frac{\beta}{2}-1}{2\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}}\right)\geq\frac{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}-1}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}}\ .$$

5 bodova

Označimo li $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=a$, $\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}=b$, dana nejednakost je ekvivalentna s

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-1}{2a}+\frac{b^2-1}{2b}\right)\geq\frac{ab-1}{a+b}\,,$$

$$\frac{(ab-1)(a+b)}{4ab}-\frac{(ab-1)}{a+b}\geq 0$$

$$(ab-1)\left(\frac{a+b}{4ab}-\frac{1}{a+b}\right)\geq 0$$

$$\frac{(ab-1)(a-b)^2}{4ab(a+b)}\geq 0\ .$$

10 bodova

Kako su α i β kutovi trokuta, $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$ su šiljasti kutovi. Zato je $a=\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}>0$, $b=\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}>0$. Treba još samo pokazati da je $ab-1\geq 0$. Kako je $0<\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}<90^\circ$, $\mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)>0$, tj.

$$\frac{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}-1}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}}\geq 0\,,$$

pa je $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}-1\geq 0$, tj. $ab-1\geq 0$.

10 bodova

Drugo rješenje. Nejednakost je ekvivalentna sljedećoj:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\\
=\;&\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)-\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\\
=\;&\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
=\;&\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}+\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)\\
=\;&\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}(\sin\alpha-\sin\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\geq 0.
\end{aligned}$$

10 bodova

Radi simetrije možemo pretpostaviti da je $\alpha \geq \beta$. Dovoljno je pokazati $\sin\alpha \geq \sin\beta$.

1° $0<\alpha\leq\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad 0<\beta\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \sin\beta\leq\sin\alpha.$ 5 bodova

2° $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \quad\Rightarrow\quad \exists\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ tako da je $\alpha=\frac{\pi}{2}+\varphi$. Tada je

$$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos\varphi.$$

Nadalje, $\beta+\varphi=\beta+\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=(\alpha+\beta)-\frac{\pi}{2}<\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$,
pa je $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, odakle slijedi

$$\sin\beta<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi=\sin\alpha\ .$$ 10 bodova

4. Kako je $90=2\cdot3^2\cdot5$, traženi broj x možemo prikazati u obliku

$$x=2^{n_1}\cdot3^{n_2}\cdot5^{n_3}\cdot\prod_{i>3}p_i^{n_i}\,,$$

pri čemu je $n_1\geq1,\ n_2\geq2,\ n_3\geq1,\ n_1,n_2,n_3\in\mathbf{N}$. 10 bodova
Tada je broj djelitelja broja x jednak

$$(n_1+1)(n_2+1)(n_3+1)\prod_{i>3}(n_i+1)=20=2\cdot2\cdot5\ .$$ 5 bodova

Jedina mogućnost je $n_1+1=n_3+1=2$ i $n_2+1=5$, tj. $n_1=n_3=1$, $n_2=4$ i $n_i=0$ za $i>3$. Dakle, traženi broj je $x=2^1\cdot3^4\cdot5^1=810$. 10 bodova