MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

4. travnja 2003.

I. razred

1. Duljine stranica trokuta su $a = b - \frac{r}{4}$, b, $c = b + \frac{r}{4}$, gdje je r polumjer tom trokutu upisane kružnice. Izrazite duljine stranica trokuta u zavisnosti od r.

2. Ako je $a > 0$, prikažite grafički u Kartezijevom koordinatnom sustavu skup svih točaka (x, y) koje zadovoljavaju nejednadžbu

$$||x+a| - |y-a|| < a\,.$$

3. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$4x + y + 4\sqrt{xy} - 28\sqrt{x} - 14\sqrt{y} + 48 = 0\,.$$

4. Koliko ima četveroznamenkastih prirodnih brojeva djeljivih sa 7, takvih da se zamjenom znamenaka jedinica i tisućica dobiva broj (ne nužno četveroznamenkast) djeljiv sa 7.

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Neka je $s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3}{2}b$. Iz formula za površinu trokuta dobivamo

$$sr = P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ,$$ 10 bodova

pa uvrštavanjem gornjih izraza za a, b i c slijedi

$$\begin{aligned} sr^2 &= (s-a)(s-b)(s-c)\ , \\ \frac{3}{2}br^2 &= \left(\frac{b}{2}+\frac{1}{4}r\right)\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{4}r\right), \\ b^2 &= \frac{49}{4}r^2\ , \end{aligned}$$

odakle je $b = \dfrac{7}{2}r$, $a = \dfrac{13}{4}r$ i $c = \dfrac{15}{4}r$. 15 bodova

2. Moramo promatrati sljedeća četiri slučaja:

1° $x+a>0$, $y-a>0$	2° $x+a<0$, $y-a>0$	3° $x+a<0$, $y-a<0$	4° $x+a>0$, $y-a<0$

5 bodova

Sada je

1° $-a < x-y+2a < a$

Zadovoljavaju točke određene s $x > -a$, $y > a$, $y < x+3a$, $y > x+a$.
To je dio grafa označen u 1°. 4 boda

2° $-a < -x-y < a$

Zadovoljavaju točke određene s $x < -a$, $y > a$, $y < -x+a$, $y > -x-a$.
To je dio grafa označen u 2°. 4 boda

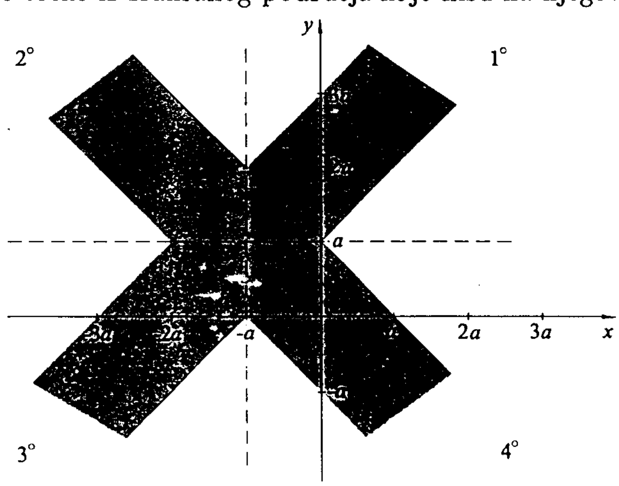
3° $-a < -x+y-2a < a$

Zadovoljavaju točke određene s $x < -a$, $y < a$, $y < x+3a$, $y > x+a$.
To je dio grafa označen u 3°. 4 boda

4° $-a < x+y < a$

Zadovoljavaju točke određene s $x > -a$, $y < a$, $y > -x-a$, $y < -x+a$.
To je dio grafa označen u 4°. 4 boda

Zadovoljavaju sve točke iz šrafiranog područja koje nisu na njegovom rubu.



4 boda

3. Danu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$4x + y + 49 + 4\sqrt{xy} - 28\sqrt{x} - 14\sqrt{y} = 1 ,$$

odnosno

$$(2\sqrt{x} + \sqrt{y} - 7)^2 = 1 .$$

Odavde slijedi $2\sqrt{x} + \sqrt{y} - 7 = \pm 1$. 6 bodova

1° $2\sqrt{x} + \sqrt{y} - 7 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y} = 8 - 2\sqrt{x}$,

$\sqrt{y} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 8 - 2\sqrt{x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} \leq 4 \quad \Rightarrow$

$x = 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16$ i $y = 64.\ 36,\ 16,\ 4,\ 0$.

7 bodova

2° $2\sqrt{x} + \sqrt{y} - 7 = -1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y} = 6 - 2\sqrt{x}$,

$\sqrt{y} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 6 - 2\sqrt{x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} \leq 3 \quad \Rightarrow$

$x = 0,\ 1,\ 4,\ 9,$ i $y = 36,\ 16,\ 4,\ 0$.

7 bodova

Dakle, rješenja su sadržana u skupu

$$\begin{aligned}(x,y) \ \in \ & \{(0,64),(1,36),(4,16),(9,4),(16,0),\\ & (0,36),((1,16,),(4,4),(9,0)\} .\end{aligned}$$

5 bodova

4. Neka je $x \in \{1,2,\ldots,9\}$ znamenka tisućica i $y \in \{0,1,2,\ldots,999\}$, tako da je dani broj jednak $1000x + y$. Prema uvjetu zadatka postoje prirodni brojevi m i n takvi da je

$$1000x + y = 7m \quad \text{i} \quad 10y + x = 7n . \qquad \text{5 bodova}$$

Odavde dobivamo:

$$\begin{aligned} 10000x + 10y &= 70m \\ x + 10y &= 7n \qquad / \cdot (-1) \\ 9999x &= 7(10m - n) . \end{aligned}$$

Kako je desna strana djeljiva sa 7, mora biti $x = 7$. 10 bodova

Iz prve jednadžbe slijedi $y = 7(m - 1000)$, tj. također mora biti djeljiv sa 7 ($y = 0, 7, 14, \ldots, 994 = 142 \cdot 7$). 5 bodova

Traženi brojevi su: 7000, 7007, 7014, 7021, ..., 7994 i ima ih 143. 5 bodova

4.

$$\left.\begin{array}{l} 1000a + 100b + 10c + d = 7x \\ 1000d + 100b + 10c + a = 7y \end{array}\right\} -$$

$$999a - 999d = 7(x-y)$$

$$999(a-d) = 7(x-y)$$ . . . . (5) bodova

$a-d$ mora biti djeljiv sa 7

ⓐ $a-d=0$ ili ⓑ $a-d=\pm 7$ . . . . (5) bodova

ⓐ $a=d$ To su brojevi $\overline{abca}$

$a=1$, $1001 + k\cdot 70$, $k=0,1,2,\dots,14$

$a=2$, $2002 + k\cdot 70$, $k=0,1,2,\dots,14$

$\vdots$

$a=9$, $9009 + k\cdot 70$, $k=0,1,2,\dots,14$

Za svaki a ih ima 15 tj. $9\cdot 15 = 135$ . . . . (5) bodova

ⓑ $a-d=\pm 7$

1° $a=1$, $d=8$

2° $a=2$, $d=9$

3° $a=7$, $d=0$

4° $a=8$, $d=1$

5° $a=9$, $d=2$

U svakom slučaju ih ima 15, dakle

$5\cdot 15 = 75$

Ukupan broj je $135 + 75 = \boxed{210}$ . . . . (10) bodova

Ukupno 25 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

4. travnja 2003.

II. razred

1. Ako su a i b kompleksni brojevi takvi da je $|a| = |b| = 1$, $a \neq b$ i z kompleksan broj, dokažite da je broj

$$\frac{1}{a-b}(z + ab\bar{z} - a - b)$$

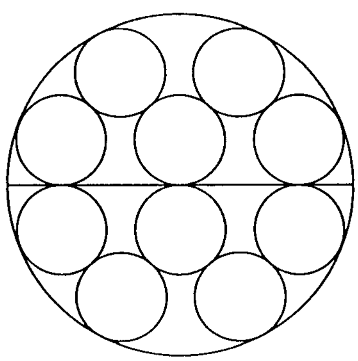
imaginaran.

2. Nađite sva rješenja jednadžbe

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}\,.$$

3. Dokažite da ne postoji polinom p s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $p(1) = 4$ i $p(4) = 9$.

4. Deset kružnica polumjera $r = 1$ postavljeno je unutar kružnice polumjera R kao na slici. Koliki je R?



Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Ako označimo $w = \dfrac{1}{a-b}(z + ab\bar{z} - a - b)$ dovoljno je pokazati da je $\overline{w} = -w$. 5 bodova

Koristeći $a\bar{a} = b\bar{b} = 1$, 5 bodova

dobivamo:

$$\begin{aligned}\overline{w} &= \frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\left(\bar{z} + \frac{1}{ab}z - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\\ &= \frac{ab}{b-a}\cdot\frac{1}{ab}(ab\bar{z} + z - b - a)\\ &= -\frac{1}{a-b}(z + ab\bar{z} - a - b) = -w\,.\end{aligned}$$

15 bodova

2. Koristit ćemo identitet $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. 5 bodova

Kubiranjem dane jednadžbe dobivamo:

$$\begin{aligned} x + (2x-3) + 3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2x-3}\cdot(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}) &= 12(x-1)\\ 3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2x-3}\cdot\sqrt[3]{12(x-1)} &= 9(x-1) \qquad /:3\ /^3\\ x(2x-3)\cdot 12\cdot(x-1) &= 27(x-1)^3 \qquad /:3\\ (x-1)[4x(2x-3) - 9(x-1)^2] &= 0\\ (x-1)(-x^2+6x-9) &= 0\\ (x-1)(x-3)^2 &= 0\end{aligned}$$

15 bodova

Rješenja dane jednadžbe su $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 3$. 5 bodova

3. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji polinom $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ s cjelobrojnim koeficijentima takav da je

$$\begin{aligned} p(1) &= a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 4,\\ p(4) &= 4^n a_n + 4^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 4a_1 + a_0 = 9\,.\end{aligned}$$

Oduzimanjem se dobiva

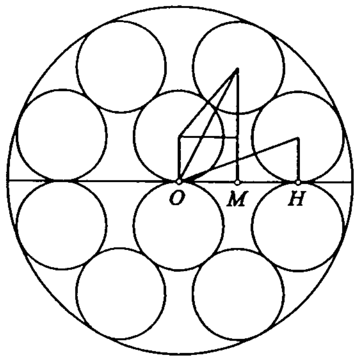
$$p(4) - p(1) = (4^n - 1)a_n + (4^{n-1} - 1)a_{n-1} + \ldots + (4-1)a_1 = 5\,.$$ 10 bodova

Broj na lijevoj strani je djeljiv s 3, jer su brojevi oblika

$$4^k - 1 = (4-1)(4^{k-1} + 4^{k-2} + \ldots + 1) = 3(4^{k-1} + 4^{k-2} + \ldots + 1)$$

očito djeljivi s 3. Međutim, na desnoj strani je 5, što nije djeljivo s 3. Prema tome, pretpostavka je bila pogrešna, tj. takav polinom p ne postoji. 15 bodova

4.



Prema slici je:

$$|OH| = \sqrt{(R-r)^2 - r^2} = 2|OM| \quad \text{i}$$

$$(R-r)^2 = |OM|^2 + (\sqrt{4r^2 - |OM|^2} + r)^2 .$$

5 bodova

Nadalje,

$$(R-r)^2 = 5r^2 + 2r\sqrt{4r^2 - |OM|^2} = 5r^2 + r\sqrt{16r^2 + r^2 - (R-r)^2} ,$$

odakle slijedi

$$R(R^3 - 4R^2r - 3Rr^2 + 14r^3) = 0 ,$$ 10 bodova

i faktorizacijom:

$$R(R-2r)(R^2 - 2Rr - 7r^2) = 0 .$$ 5 bodova

Kako je $R > 2r$, slijedi $R^2 - 2Rr - 7r^2 = 0$, tj. $R = (1+\sqrt{8})r$,
ili za $r = 1$ je $R = 1 + \sqrt{8}$. 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

4. travnja 2003.

III. razred

1. Riješite nejednadžbu

$$\log 2^2 + \log 3^{1+\frac{1}{2x}} - \log\left(3^{\frac{1}{x}} + 3^3\right) > 0 .$$

2. U konveksnom četverokutu $ABCD$ točke G_1, G_2, G_3, G_4 su redom težišta trokuta BCD, ACD, ABD, ABC, dok su A_1, B_1, C_1, D_1, točke centralno simetrične točkama A, B, C, D u odnosu na G_1, G_2, G_3, G_4. Dokažite da je $ABCD$ paralelogram ako i samo ako je $A_1B_1C_1D_1$ paralelogram.

3. Na strani ABC trostrane piramide $ABCD$ dana je točka O, kroz koju su povučene dužine $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$ i $\overline{OC_1}$, paralelno s bridovima $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ i $\overline{DC}$, do presjeka A_1, B_1, C_1 sa stranama piramide. Dokažite da je

$$\frac{|OA_1|}{|DA|} + \frac{|OB_1|}{|DB|} + \frac{|OC_1|}{|DC|} = 1.$$

4. Nađite najmanji pozitivan cijeli broj a takav da jednadžba

$$\cos^2 \pi(a-x) - 2\cos \pi(a-x) + \cos\frac{3\pi x}{2a} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2a} + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$$

ima realna rješenja.

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Danu nejednakost zapisujemo ekvivalentnom obliku:

$$\log \frac{2^2 \cdot 3^{1+\frac{1}{2x}}}{3^{\frac{1}{x}} + 3^3} > \log 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2^2 \cdot 3^{1+\frac{1}{2x}}}{3^{\frac{1}{x}} + 3^3} > 1 ,$$

$$3^{\frac{1}{x}} - 12 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} + 27 < 0 .$$

10 bodova

Supstitucijom $3^{\frac{1}{2x}} = t > 0$, dobivamo nejednadžbu

$$t^2 - 12t + 27 < 0 \qquad \text{tj.} \qquad (t-3)(t-9) < 0 ,$$

čije rješenje je $t \in (3, 9)$. 10 bodova

Rješenje dane nejednadžbe je $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. 5 bodova

2. Neka su $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$, $\vec{r}_D$; $\vec{r}_{A_1}$, $\vec{r}_{B_1}$, $\vec{r}_{C_1}$, $\vec{r}_{D_1}$; $\vec{r}_{G_1}$, $\vec{r}_{G_2}$, $\vec{r}_{G_3}$, $\vec{r}_{G_4}$ radijus-vektori odgovarajućih točaka.

Radijus-vektor $\vec{r}_{G_1}$ težišta trokuta BCD je

$$\vec{r}_{G_1} = \frac{1}{3}(\vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D).$$ 5 bodova

Kako su točke A i A_1 centralno simetrične u odnosu na G_1, imamo

$$\vec{r}_{G_1} = \frac{1}{2}(\vec{r}_{A_1} + \vec{r}_A) .$$ 5 bodova

Odavde je

$$\vec{r}_{A_1} = 2\vec{r}_{G_1} - \vec{r}_A = \frac{2}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D) - \frac{5}{3}\vec{r}_A ;$$

i analogno

$$\vec{r}_{B_1} = 2\vec{r}_{G_2} - \vec{r}_B = \frac{2}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D) - \frac{5}{3}\vec{r}_B ,$$

$$\vec{r}_{C_1} = 2\vec{r}_{G_3} - \vec{r}_C = \frac{2}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D) - \frac{5}{3}\vec{r}_C ,$$

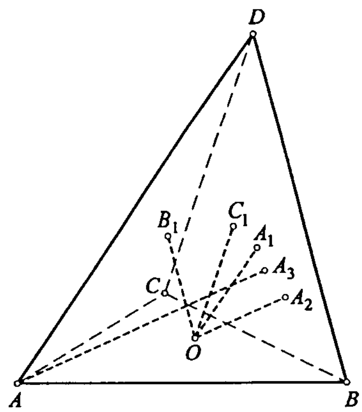
$$\vec{r}_{D_1} = 2\vec{r}_{G_4} - \vec{r}_D = \frac{2}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D) - \frac{5}{3}\vec{r}_D .$$

10 bodova

Četverokut $A_1B_1C_1D_1$ je paralelogram ako i samo ako je
$\vec{r}_{A_1} + \vec{r}_{C_1} = \vec{r}_{B_1} + \vec{r}_{D_1}$, tj. ako i samo ako je $\vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$,
a ovo je ako i samo ako je $ABCD$ paralelogram. 5 bodova

3. Pokažimo da je

$$\frac{|OA_1|}{|DA|}=\frac{V(OBCD)}{V(ABCD)},\quad \frac{|OB_1|}{|DB|}=\frac{V(OACD)}{V(ABCD)},\quad \frac{|OC_1|}{|DC|}=\frac{V(OABD)}{V(ABCD)}.$$ 5 bodova



Iz točaka O i A spustimo okomice $\overline{OA_2}$ i $\overline{AA_3}$ na stranu BCD.
Trokuti OA_2A_1 i AA_3D su slični jer je $\sphericalangle A_1OA_2=\sphericalangle DAA_3$ i $\sphericalangle OA_2A_1=\sphericalangle AA_3D=\frac{\pi}{2}$. Zato je

$$\frac{V(OBCD)}{V(ABCD)}=\frac{\frac{1}{3}|OA_2|P(BCD)}{\frac{1}{3}|AA_3|P(BCD)}=\frac{|OA_2|}{|AA_3|}=\frac{|OA_1|}{|DA|}.$$ 15 bodova

Analogno se dobiva i za preostala dva slučaja.
Sada tvrdnja slijedi iz jednakosti

$$1=\frac{V(OBCD)}{V(ABCD)}+\frac{V(OACD)}{V(ABCD)}+\frac{V(OABD)}{V(ABCD)}.$$ 5 bodova

4. Jednadžbu zapišimo u ekvivalentnom obliku

$$(\cos\pi(a-x)-1)^2+\cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right)+1=0\,.$$

Kako je

$$\cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right)+1\geq 0 \qquad \text{za svaki } x, \text{ dobivamo}$$

$$\cos\pi(x-a)=1 \qquad \text{i} \qquad \cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right)+1=0\,.$$ 5 bodova

Rješenja prve jednadžbe su $x=a+2n,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots,$ 5 bodova
a druge, $x=4a\left(\frac{1}{3}+k\right)$ ili $x=2a\left(-\frac{1}{3}+2k\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$
Prema tome $a=\dfrac{6n}{1+12k}$ ili $a=\dfrac{6n}{12k-5}$. 5 bodova
Kako su $1+12k$ i $12k-5$ relativno prosti sa 6, a a mora biti cijeli broj, slijedi $a\geq 6$. Za $n=1+12k$ ili $n=12k-5$, dobiva se $a=6$.
Najmanji pozitivan cijeli broj s danim svojstvom je $a=6$. 10 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

4. travnja 2003.

IV. razred

1. Funkcija f definirana je za svaki realni broj i za svako x i y vrijedi

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) - f(x+y) + 1 ,$$

pri čemu je $f(1) = 2$. Odredite $f(m)$ za svaki cijeli broj m.

2. Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva s parnim brojem parnih znamenaka?

3. Riješite u skupu kompleksnih brojeva sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x(x-y)(x-z) &= 3 , \\ y(y-x)(y-z) &= 3 , \\ z(z-x)(z-y) &= 3 . \end{aligned}$$

4. Dokažite da za svaki aritmetički niz (a_n) vrijedi jednakost

$$a_1 - \binom{n}{1} a_2 + \binom{n}{2} a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} a_n + (-1)^n a_{n+1} = 0, \quad n \geq 2 .$$

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Iz $f(1 \cdot m) = f(1)f(m) - f(1+m) + 1$ slijedi

$$f(m) = 2f(m) - f(m+1) + 1 \qquad \text{tj.} \qquad f(m+1) = f(m) + 1\,. \qquad (*)$$

Sada dobivamo $f(2) = f(1) + 1 = 3$, $f(3) = f(2) + 1 = 4$, $f(4) = f(3) + 1 = 5$, ... Pretpostavljamo da je $f(m) = m + 1$ za svaki prirodan broj m. To se može dokazati matematičkom indukcijom.

1° Za $m = 1$ tvrdnja vrijedi, jer je $f(1) = 2 = 1 + 1$.

2° Pretpostavimo da za neki $m \geq 1$ vrijedi $f(m) = m + 1$.

3° Dokažimo da je $f(m+1) = m + 2$. Iz $f(m) = m + 1$ slijedi

$$f(m+1) = f(m) + 1 = m + 1 + 1.$$

Time je tvrdnja dokazana za svaki prirodan broj m. 15 bodova

Iz $(*)$ za $m = 0$ slijedi $f(0) = f(1) - 1 = 1$.
Iz $(*)$ za $m = -1$, dobivamo $f(0) = f(-1) + 1$, tj.
$f(-1) = f(0) - 1 = 0$.

Neka je sada m prirodan broj. Tada je:

$$\begin{aligned} f(m-1) &= f((-1)\cdot(-m+1)) \\ &= f(-1)f(-m+1) - f(-m) + 1 \\ &= -f(-m) + 1, \end{aligned}$$

odakle, zbog $f(m-1) = m$, dobivamo

$$f(-m) = -f(m-1) + 1 = -m + 1,$$

što znači da tvrdnja vrijedi i u ovom slučaju. 10 bodova

Dakle, za svaki cijeli broj m je $f(m) = m + 1$.

2. Promatrat ćemo najprije brojeve kojima je
1° prva znamenka parna, a zatim
2° one kod kojih je prva zamenka neparna. 5 bodova

1° Prva znamenka može biti jedna od četiri znamenka: 2, 4, 6, 8.
Od preostale četiri znamenke moraju još jedna ili tri biti parne.
Za ova 4 mjesta imamo 5 mogućnosti za parne i 5 za neparne brojeve.
U ovom slučaju ima

$$4 \cdot \left[\binom{4}{1} + \binom{4}{3}\right] \cdot 5^4 = 20\,000$$

traženih brojeva. 10 bodova

2° Ovdje prvu (neparnu) znamenku možemo izabrati na 5 načina, a od preostale četiri 0, 2 ili 4 parne znamenke. Za preostala 4 mjesta imamo 5 mogućnosti za parne i 5 za neparne brojeve. U ovom slučaju ima

$$5 \cdot \left[\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4}\right] \cdot 5^4 = 25\,000\,,$$

traženih bojeva. 10 bodova

Dakle, ukupno ima $20\,000 + 25\,000 = 45\,000$ mogućnosti.

3. Primijetimo da brojevi x, y i z moraju biti međusobno različiti.

Iz prve i druge jednadžbe se dobiva

$$x(x-z) = y(z-y) \qquad \text{tj.} \qquad x^2 + y^2 = z(x+y).$$

Analogno se dobiva $y^2 + z^2 = x(y+z)$ i $z^2 + x^2 = y(z+x)$. 5 bodova

Iz ovih triju jednadžbi slijedi

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \quad \text{i} \quad x^2 = yz,\ y^2 = zx,\ z^2 = xy\,.$$ 5 bodova

Odavde je $x^2 - y^2 = yz - zx$, tj. $(x+y)(x-y) = -z(x-y)$, odakle je $x+y+z = 0$. 5 bodova

Sada iz prve jednadžbe dobivamo

$$x(x^2-(y+z)x+yz) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2-(-x)x+x^2) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^3-1 = 0.$$ 5 bodova

Faktorizacijom se dobiva

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0\,.$$

Rješenja ove jednadžbe su iz skupa $\left\{1, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$. Dakle, $(x,y,z) = \left(1, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$, ili bilo koja permutacija ovih brojeva. 5 bodova

4. *Prvo rješenje.* Pri rješavanju ćemo koristiti formulu

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}\,.$$ 5 bodova

Sada imamo:

$$\begin{aligned}
&a_1-\binom{n}{1}a_2+\binom{n}{2}a_3-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a_n+(-1)^n a_{n+1}\\
=\;& a_1-\binom{n-1}{1}a_2-\binom{n-1}{0}a_2+\binom{n-1}{2}a_3+\binom{n-1}{1}a_3-\ldots\\
&+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}a_n+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-2}a_n+(-1)^n a_{n+1}\\
=\;& \underbrace{(a_1-a_2)}_{d}-\binom{n-1}{1}\underbrace{(a_2-a_3)}_{d}+\binom{n-1}{2}\underbrace{(a_3-a_4)}_{d}-\ldots\\
&+(-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}\underbrace{(a_{n-1}-a_n)}_{d}+(-1)^{n-1}\underbrace{(a_n-a_{n+1})}_{d}\\
=\;& d\cdot\left[1-\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}-\ldots+(-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}+(-1)^{n-1}\right]\\
=\;& d\cdot[1+(-1)]^{n-1}=0\,.
\end{aligned}$$

20 bodova

Drugo rješenje. Dokaz matematičkom indukcijom.
1° Za $n=2$ je $a_1-2a_2+a_3=a_1-2(a_1+d)+(a_1+2d)=0$.
2° Pretpostavimo da jednakost vrijedi za neki $n\geq 2$.
3° Koristimo formulu iz prvog rješenja. 5 bodova

$$\begin{aligned}
&a_1-\binom{n+1}{1}a_2+\binom{n+1}{2}a_3-\ldots+(-1)^n\binom{n+1}{n}a_n+(-1)^{n+1}a_{n+2}\\
=\;& a_1-\binom{n}{1}a_2-\binom{n}{0}a_2+\binom{n}{2}a_3+\binom{n}{1}a_3-\ldots\\
&+(-1)^n\binom{n}{n}a_{n+1}+(-1)^n\binom{n}{n-1}a_{n+1}+(-1)^{n+1}a_{n+2}
\end{aligned}$$

(po pretpostavci indukcije)

$$\begin{aligned}
=\;& -\binom{n}{0}a_2+\binom{n}{1}a_3+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n-1}a_{n+1}+(-1)^{n+1}a_{n+2}\\
=\;& -\binom{n}{0}(a_1+d)+\binom{n}{1}(a_2+d)+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n-1}(a_n+d)+(-1)^{n+1}(a_{n+1}+d)
\end{aligned}$$

(po pretpostavci indukcije)

$$=\;-d\left[\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\right]=-d\cdot[1+(-1)]^n=0\,.$$

20 bodova