REPUBLIKA HRVATSKA
MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Regionalno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

21. svibnja 2004. godine

5. razred

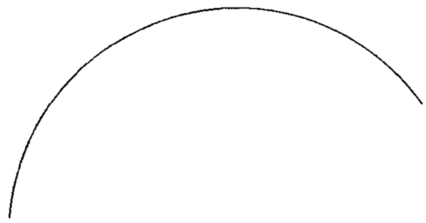
1. Izračunaj

$$128 \cdot 364 + 64 \cdot (20 + 30 : 5 + (17 + 3 \cdot 43)) - 128 \cdot 450.$$

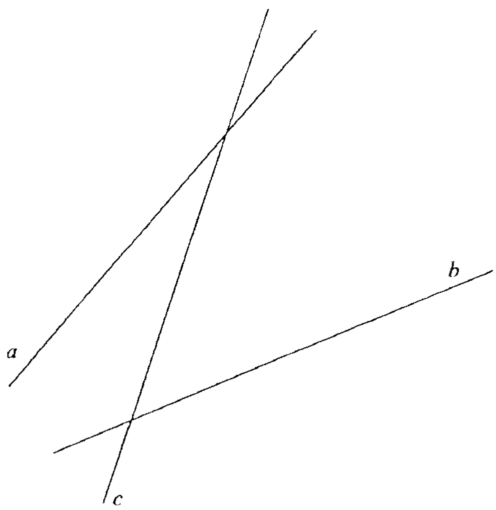
2. Odredi najmanji prirodni broj a tako da vrijedi $a \cdot 180 = b \cdot b \cdot b \cdot b$, pri čemu je b djelitelj broja a.

3. Prirodni broj n podijeljen sa 6 daje ostatak 4, a podijeljen s 15 daje ostatak 7. Koliki je ostatak pri dijeljenju broja n s 30?

4. Mali Ivica je nacrtao na papiru kružnicu, a nestašna sekica mu je obrisala dio kružnice i središte, tako da je na papiru ostao samo dio kružnice kao na slici. Odredi središte kružnice čiji je dio na slici i nacrtaj je. Postupak opiši.



5. Zadani su pravci a, b i c u ravnini kao na slici. Odredi točku A na pravcu a i točku B na pravcu b tako da su točke A i B osnosimetrične obzirom na pravac c. Postupak opiši.



2004.
REGIONALNO

RJEŠENJA ZA 5. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $128 \cdot 364 + 64 \cdot (20 + 6 + 17 + 129) - 128 \cdot 450$ — 2 boda
$= 128 \cdot 364 + 64 \cdot 172 - 128 \cdot 450$ — 2 boda
$= 64 \cdot (2 \cdot 364 + 172 - 2 \cdot 450)$ — 2 boda
$= 64 \cdot (728 + 172 - 900)$ — 2 boda
$= 64 \cdot 0 = 0$ — 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Budući da je b djelitelj broja a, onda postoji $k \in N$ takav da je $a = kb$. — 2 boda
Tada je $kb \cdot 180 = b \cdot b \cdot b \cdot b$, $k \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = b \cdot b \cdot b$, $k \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) = b \cdot b \cdot b$. — 3 boda
S obzirom da se traži najmanji prirodni broj a onda i k mora biti najmanji, pa je zato $k = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 150$ i $b = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Konačno, $a = 4500$. — 5 bodova

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Broj n možemo zapisati na ove načine: $n = 6x + 4$, $n = 15y + 7$, gdje su x, y nenegativni cijeli brojevi. — 2 boda

Tražimo ostatak pri dijeljenju s 30, tj. tražimo prirodni broj r, $r < 30$, takav da je $n = 30z + r$, gdje je z neki nenegativni cijeli broj. Pomnožimo li prvi izraz za n s 5, a drugi s 2, te ih oduzmemo dobivamo $3n = 30(x - y) + 6$, tj. $n = 10(x - y) + 2$. Zaključujemo da je znamenka jedinica broja n, a time i broja r jednaka 2. Dakle, r može biti 2, 12 ili 22. — 2 boda

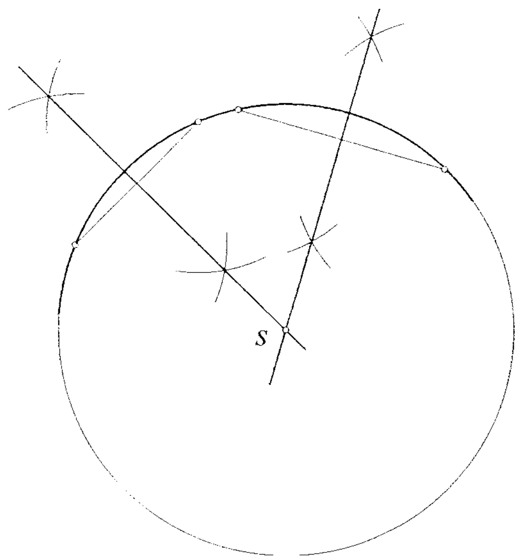
Kad bi r bio jednak 2, tada bi izjednačavajući izraze $n = 15y + 7$ i $n = 30z + 2$ dobili $15y + 7 = 30z + 2$, tj. $5 = 30z - 15y$. Desna strana ove jednakosti djeljiva je s 15, a lijeva nije. Dakle, r nije 2. — 2 boda

Kad bi r bio 12 tada iz izraza $n = 30z + 12$ zaključujemo da je n djeljiv sa 6, a to nije istina. Dakle, r nije jednako 12. — 2 boda

Preostala nam je dakle samo mogućnost da je $r = 22$. Da takav broj n postoji lako se možemo uvjeriti stavljajući $z = 1$. Tada je $n = 52$ i on zadovoljava sve uvjete zadatka. — 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Slika — 5 bodova



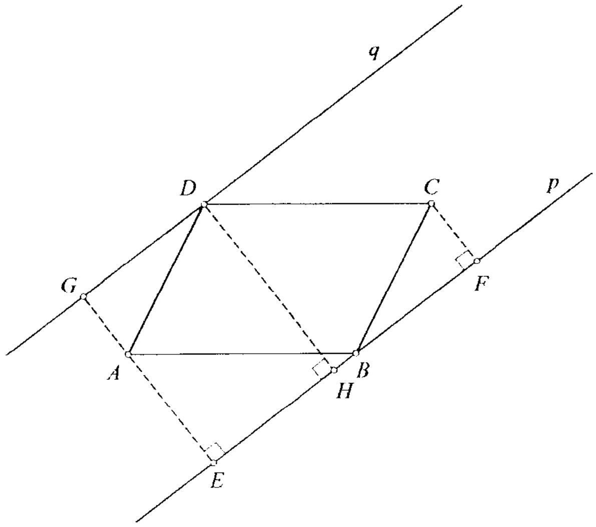
Simetrala svake tetive kružnice prolazi središtem te kružnice. Zato na danom dijelu kružnice odaberemo bilo koje dvije tetive, te im konstruiramo simetrale. Sjecište tih simetrala je središte kružnice. . 5 bodova

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. RAZRED REGIONALNO 2004. god

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Skica. 2 boda



Nožišta okomica iz točaka A, D i C na pravac p označimo s E, H i F.

Točkom D povucimo pravac q paralelan s pravcem p i s točkom G označimo presjek okomice AE i pravca q. 2 boda

Trokuti GAD i FCB su sukladni jer su pravokutni, kutovi $\sphericalangle GDA$ i $\sphericalangle CBF$ su sukladni (šiljasti kutovi s paralelnim kracima) i $|CB| = |AD|$. 3 boda

Stoga je i $|AG| = |CF|$. Tada je $|DH| = |GE| = |GA| + |AE| = |CF| + |AE|$, što je i trebalo pokazati.
. 3 boda

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

REPUBLIKA HRVATSKA
MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Regionalno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

21. svibnja 2004. godine

6. razred

1. Zbroji

$$0.01 + 0.02 + 0.03 + 0.04 + 0.05 + \ldots + 0.66 + 0.67 + 0.68.$$

2. Maji je pukla ogrlica nanizana od perlica koralja. Našla je $\frac{1}{3}$ perlica na podu, $\frac{1}{4}$ u džepu kaputa, $\frac{1}{5}$ ispod ormara, dok je $\frac{1}{6}$ perlica ostalo nanizano. Ako šest perlica nikada nije pronašla, od koliko se perlica sastojala Majina ogrlica?

3. Teo, Bruno, Goran i Matej su u svojim gradovima bili najuspješniji na matematičkom natjecanju. Oni žive u Osijeku, Rijeci, Splitu i Zagrebu i osim matematikom bave se točno jednim od ova četiri športa: plivanjem, skijanjem, nogometom ili košarkom. Kojim se športom bavi svatko od njih i u kojem gradu živi, ako je poznato da:

   1. Goran trenira košarku,
   2. Bruno ne živi ni u Rijeci niti u Zagrebu,
   3. Riječanin se bavi nogometom,
   4. Osječanin ne zna ni skijati niti plivati,
   5. Teo i Bruno se ne bave plivanjem?

4. Koliki je opseg trokuta kojemu su duljine dviju stranica 11 cm i 77 cm, a duljina treće stranice je višekratnik duljine najkraće stranice?

5. Zadan je paralelogram $ABCD$ s tupim kutem pri vrhu B. Kroz vrh B povučen je pravac p koji osim točke B nema drugih zajedničkih točaka s paralelogramom $ABCD$. Iz preostalih vrhova paralelograma spuštene su okomice na pravac p. Pokaži da je duljina najdulje okomice jednaka zbroju duljina preostalih dviju okomica.

RJEŠENJA ZA 6. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Dani zbroj napišimo ovako: $(0.01 + 0.68) + (0.02 + 0.67) + \ldots + (0.34 + 0.35)$ 6 bodova
To je dalje jednako $0.69 \cdot 34 = 23.46$. 4 boda
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. S x označimo broj perlica na ogrlici. Maja je našla $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x = \frac{57}{60}x$ perlica. 5 bodova
Dakle, nije pronašla $\frac{3}{60}x$ perlica, tj. $\frac{3}{60}x = 6$. Odavde dobivamo da je $x = 120$. Ogrlica je imala 120 perlica. 5 bodova
.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Popunimo ovu tablicu s podacima koji su zadani u zadatku. Pri popunjavanju koristimo svojstvo da ako je u nekom polju $+$, tada ostala polja u retku i stupcu koji se sijeku u tom promatranom polju popunjavamo s $-$.

	OS	RI	ST	ZG	pliv.	skij.	nogom.	koš.
Teo					−			−
Bruno		−		−	−			−
Goran					−	−	−	+
Matej								−
plivanje	−	−						
skijanje	−	−						
nogomet	−	+	−	−				
košarka		−						

U dijelu tablice koji opisuje vezu športa i grada imamo u stupcu "OS" tri minusa. Dakle, znak $+$ mora se nalaziti u retku "košarka". Dakle, Osječanin se bavi košarkom, a iz prvog uvjeta zadatka znamo da Goran trenira košarku, pa zaključujemo da je Goran iz Osijeka. U dijelu tablice koji opisuje vezu osobe i športa u stupcu "pliv" imamo tri $-$, pa se plivanjem bavi Matej. Odmah zaključujemo da Matej nije iz Rijeke, jer se Riječanin bavi nogometom. Popunimo tablicu u skladu s ovim zaključivanjima.

	OS	RI	ST	ZG	pliv.	skij.	nogom.	koš.
Teo	−				−			−
Bruno	−	−		−	−			−
Goran	+	−	−	−	−	−	−	+
Matej	−	−			+	−	−	−
plivanje	−	−						
skijanje	−	−						
nogomet	−	+	−	−				
košarka	+	−	−	−				

Sad je očito da je Riječanin Teo, pa odmah imamo da se Teo bavi nogometom. Kad ove podatke upišemo u tablicu, u stupcu "ZG" imamo tri $-$, pa je Matej Zagrepčanin i time je plivanje spojeno sa stupcem "ZG". Tablica izgleda ovako:

	OS	RI	ST	ZG	pliv.	skij.	nogom.	koš.
Teo	−	+	−	−	−	−	+	−
Bruno	−	−		−	−		−	−
Goran	+	−	−	−	−	−	−	+
Matej	−	−	−	+	+	−	−	−
plivanje	−	−	−	+				
skijanje	−	−		−				
nogomet	−	+	−	−				
košarka	+	−	−	−				

I konačno očitavamo da je Bruno iz Splita i da se bavi skijanjem.

Bodovanje: Po jedan bod za svaki točan odgovor tipa "Osoba X se bavi športom Y i živi u gradu Z." Ostalih 6 bodova treba raspodijeliti na opis postupka koji može biti sličan ovome predloženom postupku s tablicama, mogu se upotrebljavati grafovi ili se može samo rečenicama opisivati tijek zaključivanja itd.
.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Označimo $a = 11$, $b = 77$. Tada je $c = 11n$. Zbroj duljina dviju stranica trokuta je uvijek veći od duljine treće stranice. Zato vrijedi $a + b > c$, $88 > 11n$, $8 > n$. 3 boda

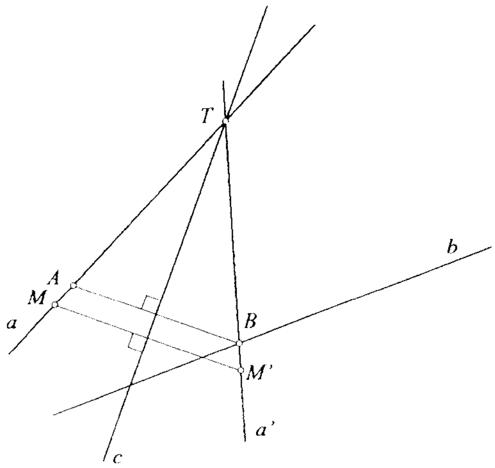
Također vrijedi $a + c > b$, $11 + 11n > 77$, $11n > 66$, $n > 6$. 3 boda

Prirodni broj n je veći od 6 i manji od 8, pa je $n = 7$. Dakle, treća stranica trokuta ima duljinu 77 cm. 2 boda

Opseg trokuta je 165 cm. 2 boda

6. RAZRED - REGIONALNO 2004

5. Slika 5 bodova



Analiza. Točka B osnosimetrična je točki A s obzirom na pravac c. Dakle, B se nalazi na pravcu a' koji je osnosimetričan pravcu a s obzirom na pravac c. Ali, točka B se nalazi i na pravcu b. Dakle, B je presjek pravaca b i a'. Pravac a' crtamo pronalazeći osnosimetričnu točku proizvoljnoj točki M pravca a i koristeći činjenicu da je presjecište T pravaca a i c samo sebi osnosimetrično.

Konstrukcija. Na pravcu a odaberemo bilo koju točku M i nacrtamo joj osnosimetričnu točku M' s obzirom na pravac c. Pravac $a' = TM'$ je osnosimetričan pravcu a s obzirom na pravac c. Sjecište pravaca b i a' je točka B. Točku A odredimo kao osnosimetričnu točku točki B s obzirom na pravac c.

opis postupka: 5 bodova

.... UKUPNO 10 BODOVA