MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
Omišalj, 4.– 7. svibnja 2005. godine

7. razred

1. Odredi troznamenkasti broj $\overline{abc}$, tako da je dvoznamenkasti broj $\overline{ac}$ jednak 12% broja $\overline{abc}$.

2. Sok od naranče određene koncentacije dobije se razrijeđivanjem narančinog sirupa vodom. U jednoj boci nalazi se sok koncentracije 20%, a u drugoj koncentracije 50%. Kad bismo $\frac{1}{6}$ soka iz prve boce prelili u drugu bocu, sok u drugoj boci bio bi koncentracije 42.5%. Kad bismo soku iz prve boce dodali sav sok iz druge boce i još 3 litre vode, dobili bismo sok koncentracije 22.5%. Koliko je soka u kojoj boci?

3. Koliko ima uređenih parova cijelih brojeva (m, n) takvih da je

$$|m| + |n| < 2005\,?$$

4. Konstruiraj trokut ABC ako je $v_a = 3.5$ cm, $b = 4$ cm i polumjer opisane kružnice $r = 3$ cm.

5. Dan je šiljastokutan jednakokračan trokut ABC. Simetrala kuta $\angle ABC$ siječe krak $\overline{AC}$ u točki D. Okomica točkom D na simetralu BD siječe pravac AB u točki F. Paralela točkom D s osnovicom $\overline{AB}$ siječe krak $\overline{BC}$ u točki E, a visinu iz vrha C na osnovicu $\overline{AB}$ u točki M. Dokaži da je

$$|DM| = \frac{1}{4}|FB|.$$

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

1. Kako je $12\% = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$, to zbog uvjeta zadatka vrijedi jednakost $\overline{ac} = \frac{3}{25}\overline{abc}$, tj. $25(10a + c) = 3(100a + 10b + c)$, odnosno $50a + 30b = 22c$.
Iz zadnje jednakosti slijedi da je broj $22c$ djeljiv sa 10 jer su oba pribrojnika djeljiva sa 10, a to znači da je $c = 5$, zato jer je očito $c \neq 0$.
Stoga je $50a + 30b = 110$, odnosno $5a + 3b = 11$. Kako je $5a < 11$, slijedi da je $a = 1$ ili $a = 2$.
Za $a = 1$ dobivamo da je $b = 2$, pa je $\overline{abc} = 125$. Za $a = 2$ zadatak nema rješenja.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka su x i y redom količine soka u prvoj i drugoj boci (u litrama). Budući da je koncentracija soka u prvoj boci 20%, u prvoj boci je $\frac{1}{5}x$ litara sirupa. Slično, u drugoj boci je $\frac{1}{2}y$ litara sirupa.
Nakon prelijevanja $\frac{1}{6}$ soka, tj. $\frac{1}{6}x$ litara soka iz prve boce u drugu, u drugoj boci bi se nalazilo $\frac{1}{6}x + y$ litara soka, odnosno $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{30}x + \frac{1}{2}y$ litara sirupa. Koncentracija je tada 42.5%, odnosno

$$\frac{1}{30}x + \frac{1}{2}y = 0.425(\frac{1}{6}x + y). \qquad (1)$$

Kad bismo soku iz prve boce dodali sok iz druge boce i 3 litre vode, u boci bi bilo $x + y + 3$ litre soka, tj. $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y$ litara sirupa. Koncentracija je tada 22.5%, odnosno

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 0.225(x + y + 3). \qquad (2)$$

(1) i (2) daje sustav jednadžbi $x - 2y = 0$, $x - 11y + 27 = 0$. Rješenje sustava je $x = 6$, $y = 3$.
Dakle, u prvoj posudi su 6 litara, a u drugoj 3 litre soka.

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Pogledajmo ponajprije koliko ima uređenih parova (m, n) gdje su m i n prirodni brojevi koji zadovoljavaju uvjete zadatka. Ako je $m = 1$, onda n može poprimiti vrijednosti $1, 2, 3, \ldots, 2003$; ako je $m = 2$ onda n može poprimiti vrijednosti $1, 2, 3, \ldots, 2002; \ldots$; ako je $m = 2003$ onda n može poprimiti samo vrijednost 1. Dakle, uređenih parova (m, n) gdje su m i n prirodni brojevi ima

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2003 = \frac{2003 \cdot 2004}{2} = 2007006.$$

Pogledajmo sada koliko ukupno ima uređenih parova (m, n) koji zadovoljavaju uvjet zadatka, gdje su m i n cijeli brojevi različiti od nule. Iz uvjeta $|m| + |n| < 2005$ slijedi da svakom uređenom paru (m, n) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju zadani uvjet možemo pridružiti uređene parove $(-m, n)$, $(m, -n)$ i $(-m, -n)$ cijelih brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka. Prema tome, broj uređenih parova cijelih brojeva (m, n) koji su različiti od nule ima ukupno

$$4 \cdot 2007006 = 8028024.$$

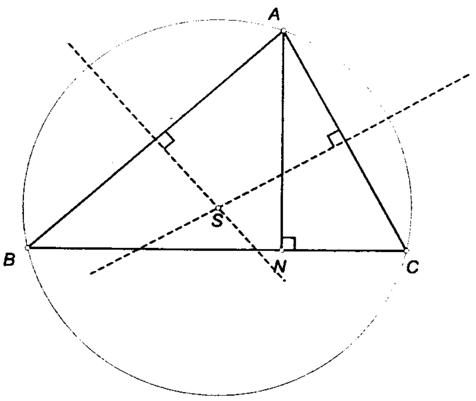
Konačno, preostaje prebrojati uređene parove kojima je barem jedna koordinata jednaka nuli. Ako je $m = 0$, onda uvjet $|m| + |n| < 2005$ prelazi u $|n| < 2005$, a cijelih brojeva n koji zadovoljavaju taj uvjet ima $2 \cdot 2004 + 1 = 4009$. Dakle, uređenih parova kojima je prva koordinata jednaka nuli, a zadovoljavaju uvjet zadatka, ima 4009. Analogno, uređenih parova kojima je druga koordinata jednaka nuli, a zadovoljavaju uvjet zadatka ima također 4009. Ukupno, uređenih parova cijelih brojeva kojima je barem jedna koordinata jednaka nuli ima $4009 + 4009 - 1 = 8017$ jer smo uređeni par $(0, 0)$ računali dva puta.
Konačno, traženi broj je jednak

$$8028024 + 8017 = 8036041.$$

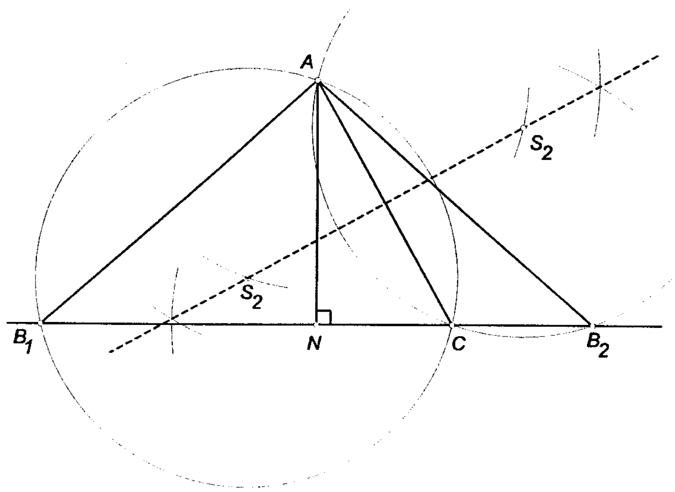
.... UKUPNO 10 BODOVA

4.

ANALIZA: U pravokutnom trokutu ANC poznate su duljine dviju stranica v_a i b pa njega možemo konstruirati. Kako je središte S opisane kružnice sjecište simetrala stranica trokuta ABC, točka S se mora nalaziti na simetrali stranice $\overline{AC}$.



KONSTRUKCIJA

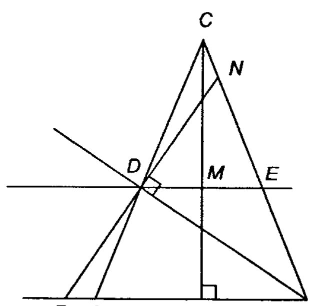


1. Konstruirati $\triangle ANC$.
2. Konstruirati simetralu stranice $\overline{AC}$.
3. Konstruirati točku S kao presjek kružnice sa središtem A i polumjerom r i simetrale stranice $\overline{AC}$.
4. Konstruirati vrh B kao presjek kružnice sa središtem S i polumjerom r i pravca NC.

Zadatak ima dva rješenja: $\triangle AB_1C$, $\triangle AB_2C$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



Neka je točka N presjek pravaca FD i BC. Trokuti BDF i BDN su sukladni, pa je $|FD| = |DN|$. Budući da je DE paralelno s BF i DE prolazi polovištem dužine $\overline{FN}$, slijedi da je $\overline{DE}$ srednjica trokuta FBN. Iz toga slijedi da je $|DE| = \frac{1}{2}|FB|$.

Pravac DE paralelan je s AB pa je trokut CDE jednakokračan s visinom $\overline{CM}$. Dakle, $|DM| = \frac{1}{2}|DE|$.

Sad je $|DM| = \frac{1}{2}|DE| = \frac{1}{4}|FB|$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
Omišalj, 4.– 7. svibnja 2005. godine

8. razred

1. Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{abc}$ koji imaju svojstvo da je $\dfrac{22}{a^2+b^2+c^2}$ prirodan broj.

2. Nad stranicama pravokutnog trokuta konstruirani su izvana jednakostranični trokuti. Za njih vrijedi da je zbroj površina trokuta nad hipotenuzom i trokuta nad kraćom katetom jednak zbroju površina trokuta nad duljom katetom i pravokutnog trokuta. Izračunaj omjer duljina hipotenuze i kraće katete.

3. Nađi sve prirodne brojeve n za koje su ispravne točno dvije od sljedeće tri tvrdnje:

   1) Broj n je kvadrat prirodnog broja.

   2) Posljednja znamenka broja n je 3.

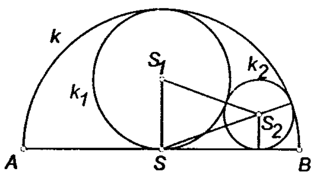
   3) Broj $n+15$ je kvadrat prirodnog broja.

4. Ako za realni broj x, $x>1$, vrijedi jednakost

$$x-\frac{1}{x}=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}},$$

   koliko je $x+\dfrac{1}{x}$?

5. Neka je dana kružnica k središta S i promjera $\overline{AB}$. U nju je upisana kružnica k_1 tako da dira promjer $\overline{AB}$ u središtu S i kružnicu k. Kružnica k_2 dira obje kružnice k i k_1 te promjer $\overline{AB}$ (slika). Dokaži da su središta tih triju kružnica vrhovi jednakokračnog trokuta.

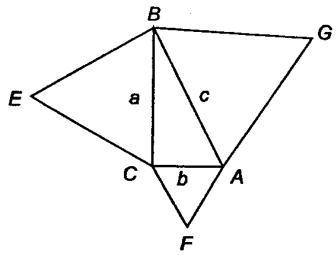


RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

1. Dani će razlomak biti prirodan broj ako je nazivnik djelitelj od 22, tj. ako je $a^2+b^2+c^2$ jednako 1,2,11 ili 22. Razmatranjem tih četiriju slučajeva dobivaju se ovi troznamenkasti brojevi: 100, 101, 110, 113, 131, 311, 233, 323, 332.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2.



Neka su oznake kao na slici i neka je $a>b$. $P(AGB)+P(ACF)=P(CBE)+P(ABC)$, $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{ab}{2}$. Uvrštavanjem $c^2=a^2+b^2$ i sređivanjem dobivamo $a=b\sqrt{3}$.
Uvrštavanjem te relacije u $c^2=a^2+b^2$ dobivamo da je $c=2b$. Traženi omjer duljina hipotenuze i kraće katete je 2:1.

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Tvrdnje 1. i 2. ne mogu istovremeno biti ispravne, jer nijedan kvadrat prirodnog broja nema posljednju znamenku jednaku 3. Isto tako, tvrdnje 2. i 3. ne mogu biti obje ispravne, jer bi to značilo da je broj s posljednjom znamenkom 8 jednak kvadratu nekog prirodnog broja, a to je nemoguće. Dakle, ispravne su 1. i 3. tvrdnja.

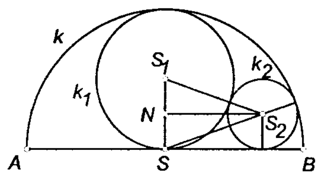
Neka je $n=x^2$ i $n+15=y^2$. Oduzimanjem prve jednakosti od druge dobivamo: $y^2-x^2=15$, tj. $(y-x)(y+x)=15$. Odavde dobivamo sustave jednadžbi: $(y-x=1, y+x=15)$ i $(y-x=3, y+x=5)$. Rješenje prvog sustava je $(x,y)=(7,8)$, a drugog $(x,y)=(1,4)$, pa je $n=1$ ili $n=49$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Uvedimo zamjenu: $\sqrt{x}=a$. Tada je $a>1$ i uvjet glasi: $a^2-\frac{1}{a^2}=a+\frac{1}{a}$, tj. $(a-\frac{1}{a})(a+\frac{1}{a})=a+\frac{1}{a}$. Ovu jednakost možemo podijeliti s $a+\frac{1}{a}$ jer taj izraz nije 0 za brojeve a veće od 1. Dakle, $a-\frac{1}{a}=1$. Kvadriranjem zadnje relacije dobivamo $a^2+\frac{1}{a^2}=3$, tj. $x+\frac{1}{x}=3$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



Neka je središte kružnice k_1 točka S_1, a polumjer R, a središte kružnice k_2 točka S_2 i polumjer r. Tada je polumjer kružnice k jednak $2R$. Iz središta S_2 povucimo okomicu S_2N na polumjer $\overline{SS_1}$. Time je trokut SS_1S_2 podijeljen na dva pravokutna trokuta, a primjena Pitagorina poučka na te trokute daje: $|NS_2|^2=(2R-r)^2-r^2$, $|NS_2|^2=(R+r)^2-(R-r)^2$. Izjednačavanjem tih jednakosti dobivamo $R=2r$. Tada je $|S_1S_2|=R+r=3r$ i $|SS_2|=2R-r=3r$, pa je trokut SS_1S_2 jednakokračan.

.... UKUPNO 10 BODOVA