./.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Omišalj, 4. – 7. svibnja 2005. godine

I. razred

1. Odredite sve brojeve čiji je zapis u dekadskom sustavu oblika $\overline{13xy45z}$, gdje su x, y i z nepoznate znamenke, koji su djeljivi sa 792.

2. Spojnice središta trokutu upisane kružnice i njegovih vrhova dijele ga na tri trokuta od kojih je jedan sličan polaznome. Odredite kutove polaznog trokuta.

3. Koju najveću vrijednost može poprimiti izraz

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n},$$

ako su k, m, n prirodni brojevi takvi da je $\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$.

4. Duljine stranica trokuta su a, b i c, a R je duljina polumjera opisane mu kružnice. Odredite kutove trokuta ako vrijedi $R=\frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$.

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

Rješenja za I. razred

1. Rastavimo na faktore: $792 = 8 \cdot 9 \cdot 11$.
Iz uvjeta $8 \mid \overline{13xy45z}$ vidimo da 8 dijeli $\overline{45z} = 450 + z = 448 + (z+2)$. Dakle, $8 \mid z+2$, pa je $z = 6$.

Iz uvjeta $9 \mid \overline{13xy456}$ slijedi da 9 dijeli $1+3+x+y+4+5+6 = x+y+19 = 18+(x+y+1)$. Dakle, $9 \mid x+y+1$, pa je $x+y=8$ ili $x+y=17$.

Iz uvjeta $11 \mid \overline{13xy456}$ dobivamo da 11 dijeli $6-5+4-y+x-3+1 = x-y+3$, odakle je $x-y=-3$ ili $x-y=8$.

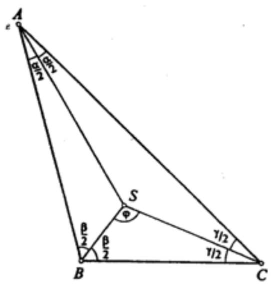
Imamo dvije mogućnosti:

1° ako je $x+y$ paran broj, onda je $x+y=8$ i $x-y=8 \Rightarrow x=8,\ y=0$;

2° ako je $x+y$ neparan broj, onda je $x+y=17$ i $x-y=-3 \Rightarrow x=7,\ y=10$, što nije znamenka.

Jedino rješenje je broj 1380456.

2. Neka su α, β, γ kutovi danog trokuta ABC i S središte upisane mu kružnice. Spojnice točke S s vrhovima su simetrale kutova trokuta. Kako je $\measuredangle SBC = \dfrac{\beta}{2}$ i $\measuredangle SCB = \dfrac{\gamma}{2}$, treći kut u trokutu BSC je
$\measuredangle CSB = 180° - \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{\gamma}{2} = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$.



Pretpostavimo li da su trokuti ABC i CSB slični, kut CSB mora biti jednak jednom od kutova α, β ili γ. Kada bi bilo $\measuredangle CSB = \alpha$, bilo bi $90° + \dfrac{\alpha}{2} = \alpha$, odakle slijedi $\alpha = 180°$, što nije moguće.

Zato može biti samo $\measuredangle CSB = \beta$ ili $\measuredangle CSB = \gamma$. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti $\measuredangle CSB = \beta$. Sada postoje dvije mogućnosti: $\measuredangle SBC = \alpha$ ili $\measuredangle SBC = \gamma$.

U prvom slučaju bilo bi $\measuredangle BCS = \gamma$, tj. $\dfrac{\gamma}{2} = \gamma$, što nije moguće. Zato mora biti $\measuredangle SBC = \gamma$ i $\measuredangle BCS = \alpha$.

Odavde je $\gamma = 2\alpha$, $\beta = 2\gamma = 4\alpha$.

Budući je $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, dobivamo $\alpha+2\alpha+4\alpha = 180°$, odakle je $\alpha = \dfrac{1}{7}\cdot 180°$, što daje $\beta = \dfrac{4}{7}\cdot 180°$ i $\gamma = \dfrac{2}{7}\cdot 180°$.

3. Označimo $M = \frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $k \le m \le n$. Za broj k imamo ove mogućnosti:

1° $\underline{k = 2}$. Kako je $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m} > 1$, mora biti $m > 2$.

Ako je $\underline{m = 3}$, iz $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n} < 1$ slijedi $\frac{1}{n} < \frac{1}{6}$, pa mora biti $n > 6$. Zato se, u ovom slučaju, najveći broj M dobiva za $n = 7$ i on iznosi $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$.

Ako je $\underline{m = 4}$, tada iz $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n} < 1$ dobivamo $\frac{1}{n} < \frac{1}{4}$, pa je $n > 4$. Broj M će biti najveći za $n = 5$: $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$.

Ako je $\underline{m > 4}$ iz $\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ i $\frac{1}{n} \le \frac{1}{m}$ vidimo da će vrijednost od M biti najveća za $n = m = 5$; $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{9}{10}$.

2° $\underline{k = 3}$. Tada za $\underline{m = 3}$ iz $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n} < 1$ slijedi $\frac{1}{n} < \frac{1}{3}$ pa je $n > 3$. Najveća vrijednost broja M postiže se za $n = 4 : M = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$.

Ako je $\underline{m > 3}$, možemo uzeti $n = m$, pa je najveća vrijednost broja M jednaka $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6}$.

3° $\underline{k \ge 4}$. Možemo uzeti $m \doteq n = k$, pa je najveća vrijednost broja M jednaka $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Prema tome, u svim slučajevima, ako za brojeve k, m, n vrijedi $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$, onda je

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \le \frac{41}{42}.$$

Najveća vrijednost koju dani izraz uz navedene uvjete može poprimiti je $\frac{41}{42}$.

4. Kako je $b + c \ge 2\sqrt{bc}$, to je $\frac{\sqrt{bc}}{b+c} \le \frac{1}{2}$, pa dani uvjet povlači $\frac{R}{a} \le \frac{1}{2}$, odnosno, $a \ge 2R$.

No, s druge strane je $a \le 2R$ jer duljina stranice trokuta ne može biti veća od promjera trokutu opisane kružnice.

Dakle, $a = 2R$. Uvrštavanjem u dani uvjet, dobivamo $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c} = 1$, odakle je $(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 = 0$. Dakle, $b = c$.

Iz $b = c$ i $R = \frac{a}{2}$ slijedi da je dàni trokut jednakokračan i pravokutan, a duljina hipotenuze mu je a. Njegovi su kutovi $\alpha = 90°$, $\beta = \gamma = 45°$.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Omišalj, 4. – 7. svibnja 2005. godine

II. razred

1. Neka su a, b, c realni brojevi, $a \neq 0$. Ako je x_1 jedno rješenje jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

i x_2 jedno rješenje jednadžbe

$$-ax^2 + bx + c = 0,$$

dokažite da je tada jedno rješenje x_3 jednadžbe

$$\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0,$$

između x_1 i x_2, tj. $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ ili $x_2 \leq x_3 \leq x_1$.

2. Središte U upisane kružnice trokuta ABC spojeno je dužinama s njegovim vrhovima. Neka su O_1, O_2 i O_3 središta kružnica opisanih trokutima BCU, CAU i ABU. Dokažite da kružnice opisane trokutima ABC i $O_1O_2O_3$ imaju zajedničko središte.

3. Ako su a, b i c realni brojevi veći od 1, dokažite da za svaki realni broj r vrijedi nejednakost

$$(\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq 3 \cdot 2^r.$$

4. Dokažite da u svakom skupu od 11 prirodnih brojeva postoji njih 6, čiji je zbroj djeljiv sa 6.

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

Rješenja za II. razred

1. Ako je $c = 0$ onda je 0 rješenje svake od ove tri jednadžbe.
Pretpostavimo sada da je $c \neq 0$, pa su $x_1, x_2 \neq 0$.
Promatrajmo kvadratnu funkciju $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$.
Kako je $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, dobivamo

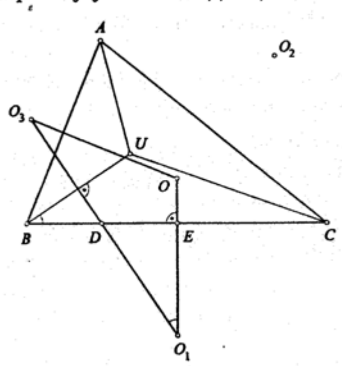
$$f(x_1) = \frac{a}{2}x_1^2 + bx_1 + c = (ax_1^2 + bx_1 + c) - \frac{a}{2}x_1^2 = -\frac{a}{2}x_1^2.$$

Isto tako, zbog $-ax_2^2 + bx_2 + c = 0$, je

$$f(x_2) = \frac{a}{2}x_2^2 + bx_2 + c = (-ax_2^2 + bx_2 + c) + \frac{3a}{2}x_2^2 = \frac{3a}{2}x_2^2.$$

Dakle, $f(x_1)f(x_2) < 0$, pa kvadratna funkcija $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$ za x_1 i x_2 poprima vrijednosti suprotnih predznaka. Zato postoji rješenje jednadžbe $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$, x_3, takvo da je $x_3 \in (x_1, x_2)$ ili $x_3 \in (x_2, x_1)$. Naime parabola $y = f(x)$ siječe x-os u nekoj točki između $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$.

2. Kako je U središte upisane kružnice trokutu ABC, njegove spojnice s vrhovima A, B i C raspolavljaju kutove α, β i γ trokuta ABC.



Neka je O središte trokutu ABC opisane kružnice. Kako središte trokutu opisane kružnice leži na simetrali svake njegove stranice, točke O i O_1 leže na simetrali stranice $\overline{BC}$, pa je OO_1 simetrala stranice $\overline{BC}$. Slično se vidi da su OO_3 i O_1O_3 simetrale stranica $\overline{AB}$ i $\overline{UB}$. Budući da su $\sphericalangle UBC$ i $\sphericalangle O_3O_1O$ kutovi s okomitim kracima, vrijedi

$$\sphericalangle UBC = \sphericalangle O_3O_1O \qquad \text{tj.} \qquad \sphericalangle O_3O_1O = \frac{\beta}{2}.$$

Slično je $\sphericalangle OO_3O_1 = \frac{\beta}{2}$. Odavde slijedi $\sphericalangle O_3O_1O = \sphericalangle OO_3O_1$. Trokut O_1OO_3 je jednakokračan, tj. $|OO_1| = |OO_3|$. Na isti način se dobije $|OO_1| = |OO_2|$, tj. $|OO_1| = |OO_2| = |OO_3|$. Zato je točka O središte kružnice opisane trokutu $O_1O_2O_3$.

3. Označimo lijevu stranu sa S. Primjenom A-G nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{S}{3} &\geq \sqrt[3]{(\log_a bc)^r \cdot (\log_b ca)^r \cdot (\log_c ab)^r} \\
&= \left[(\log_a b + \log_a c)(\log_b c + \log_b a)(\log_c a + \log_c b)\right]^{\frac{r}{3}} \\
&\geq \left[2\sqrt{\log_a b \cdot \log_a c} \cdot 2\sqrt{\log_b c \cdot \log_b a} \cdot 2\sqrt{\log_c a \cdot \log_c b}\right]^{\frac{r}{3}} \\
&= 2^r \cdot \left[\log_a b \log_b a \cdot \log_a c \log_c a \cdot \log_b c \log_c b\right]^{\frac{r}{6}} \\
&= 2^r \cdot [1 \cdot 1 \cdot 1]^{\frac{r}{6}} = 2^r.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi $S \geq 3 \cdot 2^r$.

4. Uočimo najprije da vrijede tvrdnje:

(1) *U svakom skupu od tri prirodna broja postoje dva čiji je zbroj djeljiv s 2.* Naime, u svakom skupu od tri broja postoje dva koja su iste parnosti, pa njihov zbroj paran.

(2) *U svakom skupu od pet prirodnih brojeva mogu se izabrati tri čiji je zbroj djeljiv s 3.*

Ako postoje tri broja čiji su ostaci pri dijeljenju s 3 međusobno različiti, njihov je zbroj djeljiv s 3.

Ako ne postoje takva tri broja, onda postoje tri broja s istim ostatkom pri dijeljenju s 3. Tada je njihov zbroj djeljiv s 3.

Dokažimo sada traženu tvrdnju.

Primijenimo li pet puta tvrdnju (1) možemo naći pet parova brojeva takvih da je zbroj brojeva u svakom paru paran. Promatrajući ovih pet parnih zbrojeva, primjenom tvrdnje (2) vidimo da postoje tri čiji je zbroj djeljiv s 3. Oni daju šest brojeva čiji je zbroj djeljiv sa 6.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Omišalj, 4. – 7. svibnja 2005. godine

III. razred

1. Nađite sva rješenja k, l, $m \in \mathbb{N}$ jednadžbe:
$$k!\,l! = k! + l! + m!.$$
($n!$ označava umnožak prirodnih brojeva od 1 do n.)

2. Upisana kružnica trokuta ABC dodiruje stranice $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama M, N i R. Neka je S točka na manjem od dva luka $\widehat{MN}$ i t tangenta na taj luk s diralištem S. Tangenta t siječe $\overline{NC}$ i $\overline{MC}$ redom u točkama P i Q. Dokažite da se pravci AP, BQ, SR i MN sijeku u jednoj točki.

3. Odredite skup svih točaka triedra takvih da je zbroj njihovih udaljenosti od strana triedra jednak zadanom pozitivnom broju a.

4. Pravilni poligon s 2005 stranica ima vrhove obojane crvenom, bijelom i plavom bojom. "Dozvoljenim bojanjem" zovemo bojanje u kojem dva susjedna vrha, koja su obojana različitim bojama, obojimo trećom bojom.
   a) Dokažite da postoji konačan niz "dozvoljenih bojanja" nakon kojeg su svi vrhovi poligona iste boje.
   b) Je li ta boja jednoznačno određena početnim rasporedom boja vrhova?

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

Rješenja za III. razred

1. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $k \geq l$. Tada imamo
$$k! = \frac{k!}{l!} + 1 + \frac{m!}{l!}.$$
Kako su tri člana u ovom izrazu cijeli brojevi, mora biti i posljednji, četvrti, dakle vrijedi $m \geq l$. Također zbroj na desnoj strani jednakosti je barem 3, pa je $k \geq 3$ i $k!$ je paran. Stoga je točno jedan od brojeva $\frac{k!}{l!}$, $\frac{m!}{l!}$ neparan.

1. Pretpostavimo $\frac{k!}{l!}$ je neparan i $\frac{m!}{l!}$ paran. Tada je ili $k = l$ ili $k = l + 1$ i l je paran, i nužno je $m \geq l + 1$.

1.1. U prvom slučaju ($k = l$) je $k! = 2 + \frac{m!}{k!}$.
Ako je $k = 3$, rješenje je $k = l = 3$, $m = 4$.
Ako je $k > 3$, onda je $k!$ djeljivo s 3, pa $k! - 2$ nije djeljivo s 3, te je $m = k + 1$ ili $m = k + 2$. Stoga je $\frac{m!}{k!} = k + 1$ ili $\frac{m!}{k!} = (k+1)(k+2)$, dakle $k! = k + 3$ ili $k! = 2 + (k+1)(k+2)$. Provjeravajući vidimo da $k = 4$ i $k = 5$ nisu rješenja, a za još veće vrijednosti od k lijeva strana jednakosti je veća od desne.

1.2. U drugom slučaju ($k = l + 1$ i parni l) moramo riješiti
$$(l+1)! = l + 2 + \frac{m!}{l!}.$$
Lijeva strana ove jednakosti je djeljiva s $l + 1$, kao i $\frac{m!}{l!}$, pa $l + 2$ mora biti djeljiv s $l + 1$, što je nemoguće.

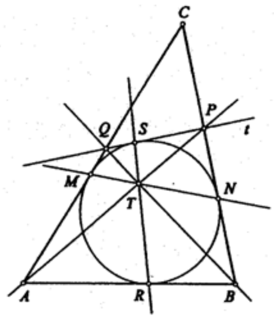
2. Preostaje slučaj kada je $\frac{k!}{l!}$ paran i $\frac{m!}{l!}$ neparan. Tada je $m = l$ ili $m = l+1$ i l je paran.

2.1. Ako je $m = l$ jednadžba se svodi na $k!\,l! = k! + 2l!$, odnosno $\frac{k!}{l!}(l! - 1) = 2$. Kako je $\frac{k!}{l!}$ paran prirodni broj nužno je $l! - 1 = 1$, odnosno $l = 2$ i $k! = 4$, što je nemoguće.

2.2. Ako je $m = l + 1$ i l paran, jednadžba se svodi na $k!\,l! = k! + (l+2)\,l!$, odnosno $k!\,(l! - 1) = (l+2)\,l!$. Zbog $\mathrm{M}\,(l!, l! - 1) = 1$ slijedi da $l + 2$ mora biti djeljivo s $l! - 1$. To je moguće jedino za $l = 2$ i tada imamo $k! = 8$, što je nemoguće.

Dakle, jedino rješenje je $k = l = 3$, $m = 4$.

2. Neka su T_1 i T_2 točke presjeka pravaca MN i QB, odnosno SR i QB. Ako dokažemo da je $T_1 \equiv T_2$, isto bi vrijedilo kada bi umjesto QB uzeli AP, i tvrdnja bi bila dokazana.



Vrijedi $\sphericalangle T_1MQ = \sphericalangle T_1NC = 180° - \sphericalangle T_1NB$, a također su vršni kutovi $\sphericalangle MT_1Q$ i $\sphericalangle BT_1N$ jednaki. Koristeći poučak o sinusima za trokute MT_1Q i BT_1N imamo

$$\frac{|QT_1|}{|MQ|} = \frac{\sin \sphericalangle T_1MQ}{\sin \sphericalangle MT_1Q} = \frac{\sin (180° - \sphericalangle T_1NB)}{\sin \sphericalangle BT_1N} = \frac{\sin \sphericalangle T_1NB}{\sin \sphericalangle BT_1N} = \frac{|T_1B|}{|BN|}$$

odnosno $\dfrac{|QT_1|}{|BT_1|} = \dfrac{|MQ|}{|BN|}$.

Analogno vrijedi $\sphericalangle T_2SQ = \sphericalangle T_2RA = 180° - \sphericalangle T_2RB$ i $\sphericalangle ST_2Q = \sphericalangle RT_2B$, pa primjenom poučka o sinusima na trokute ST_2Q i RT_2B dobivamo

$$\frac{|QT_2|}{|SQ|} = \frac{\sin \sphericalangle T_2SQ}{\sin \sphericalangle ST_2Q} = \frac{\sin (180° - \sphericalangle T_2RB)}{\sin \sphericalangle RT_2B} = \frac{\sin \sphericalangle T_2RB}{\sin \sphericalangle RT_2B} = \frac{|T_2B|}{|BR|}$$

odnosno $\dfrac{|QT_2|}{|BT_2|} = \dfrac{|SQ|}{|BR|}$.

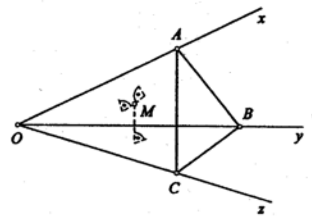
Konačno, zbog $|MQ| = |SQ|$ i $|BN| = |BR|$, slijedi $\dfrac{|QT_1|}{|BT_1|} = \dfrac{|QT_2|}{|BT_2|}$, a kako su T_1 i T_2 na $\overline{BQ}$, slijedi $T_1 \equiv T_2$.

3. Neka je $Oxyz$ dani triedar. Na bridovima Ox, Oy i Oz odaberimo točke A, B i C tako da udaljenost svake od njih do nasuprotne strane triedra bude jednaka a. Tada je volumen piramide $OABC$ jednak

$$V = \frac{1}{3}P(OBC) \cdot a = \frac{1}{3}P(OCA) \cdot a = \frac{1}{3}P(OAB) \cdot a,$$

pa je $P(OBC) = P(OCA) = P(OAB) = \dfrac{3V}{a}$.

Nadalje, neka je M točka triedra čije su udaljenosti od strana Oyz, Oxz i Oxy redom a_1, a_2, a_3.



Zbroj volumena piramida s vrhom M i bazama OBC, OAC, OAB je

$$\frac{1}{3}P(OBC) \cdot a_1 + \frac{1}{3}P(OCA) \cdot a_2 + \frac{1}{3}P(OAB) \cdot a_3 = \frac{V}{a}(a_1 + a_2 + a_3).$$

Ako volumen tetraedra $MABC$ označimo s V_1, volumen tetraedra $OABC$ je

$$V = \frac{V}{a}(a_1 + a_2 + a_3) \pm V_1,$$

pri čemu predznak ispred V_1 ovisi o tome s koje strane ravnine ABC se nalazi točka M.

Sada je jasno da iz $a_1 + a_2 + a_3 = a$ slijedi $V_1 = 0$, tj. tada točka M mora pripadati trokutu ABC.

Obratno, ako je točka M unutar tog trokuta (i $V_1 = 0$), onda je $a_1+a_2+a_3 = a$.

4. a) Označimo boje s 0, 1, 2.

Najprije ćemo pokazati da je četiri vrha uvijek moguće obojati u istu boju nizom dozvoljenih bojanja. Bilo koja četiri vrha s najviše dva dozvoljena bojanja obojimo u dva para istobojnih susjednih vrhova. Ako su ti parovi različite boje (inače smo gotovi) dalje nastavljamo ovako:

$$1122 \longrightarrow 1002 \longrightarrow 2202 \longrightarrow 2112 \longrightarrow 0000.$$

Pokažimo da, ako tri susjedna od četiri uzastopna vrha imaju istu boju, onda ih je nizom dozvoljenih bojanja moguće obojati u boju četvrtog vrha (vrhove gledamo u smjeru kazaljke na satu ili obratno):

$$1110 \longrightarrow 1122 \longrightarrow 1002 \longrightarrow 2202 \longrightarrow 2112 \longrightarrow 0000.$$

Na ovaj način obojimo vrhove A_1, A_2, A_3, A_4 u istu boju, primjerice crvenu, zatim i A_5, A_6, A_7, A_8. Nakon toga promotrimo A_4, A_5, A_6, A_7 i ako nisu svi crvene boje, onda tri od njih (A_5, A_6, A_7) imaju istu boju i moguće ih je nizom dozvoljenih bojanja obojiti u crvenu (boju vrha A_4). Nastavimo na isti način dok svi A_1, A_2, A_3,..., A_{2002} ne postanu crveni ($2002 = 4 + 3 \cdot 666$). Uzmimo sada vrhove A_{2003}, A_{2004}, A_{2005}, A_1 i obojimo ih istom bojom. Ako to nije crvena (inače smo gotovi), nego primjerice plava, uzmimo opet vrhove A_{2002}, A_{2003}, A_{2004}, A_{2005} koje je moguće obojati u crveno. Tako imamo sve crvene vrhove osim vrha A_1 koji je plavi. Krenimo opet od A_1, A_2, A_3, A_4 s bojanjima na isti način (ovaj put u plavo) i sada će nakon 666 koraka sigurno svi vrhovi biti obojani plavom bojom.

b) Sva dopustiva bojanja (tipa $01 \longrightarrow 22$, $02 \longrightarrow 11$, $12 \longrightarrow 00$), imaju svojstvo da ne mijenjaju u zbroju ostatak pri dijeljenju s 3. Stoga je završna boja jednoznačno određena početnim rasporedom boja vrhova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Omišalj, 4. – 7. svibnja 2005. godine

IV. razred

1. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je zadan rekurzivno s $a_1 = 1$,

$$a_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} + 1, \quad \text{za } n \geq 2.$$

Odredite najmanji realni broj M takav da je

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < M \quad \text{za svaki } m \in \mathbb{N}.$$

2. Neka je P polinom n-tog stupnja čiji su svi koeficijenti nenegativni, a vodeći i slobodni koeficijent jednaki su 1. Uz pretpostavku da su sve nultočke od P realni brojevi, dokažite da za svaki $x \geq 0$ vrijedi $P(x) \geq (x+1)^n$.

3. Dokažite da postoji točno jedan prirodni broj koji se u dekadskom sustavu zapisuje samo znamenkama 2 i 5, ima 2005 znamenaka i djeljiv je s 2^{2005}.

4. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut i neka su P i Q redom točke na njegovim stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ takve da je $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ$. Dokažite da trokuti ABP i ADQ imaju jednake površine ako i samo ako je spojnica njihovih ortocentara okomita na pravac AC.

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

Rješenja za IV. razred

1. Ako relaciju $a_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} + 1$ podijelimo s $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, dobit ćemo

$$\frac{1}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

što možemo napisati u obliku

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} - \frac{1}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

U posljednju jednakost redom uvrstimo $n = 2, 3, \ldots, m$ (za bilo koji $m \geq 2$) i zbrojimo sve tako dobivene jednakosti. Primijetimo da će se pokratiti svi pribrojnici osim prvog i posljednjeg tako da ćemo dobiti

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_m},$$

tj.

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} = \frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_m} = 2 - \frac{1}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_m},$$

pa je

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < 2 \quad \text{za svaki } m \in \mathbb{N}.$$

Treba još dokazati $M = 2$, tj. da je 2 najmanji broj za koji je $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < M$ za sve $m \in \mathbb{N}$.

Iz definicije niza se vidi $a_n \geq a_{n-1}+1$, odakle jednostavnom indukcijom slijedi $a_n \geq n$ za svaki prirodni broj n. Zato imamo

$$0 < \frac{1}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_m} \leq \frac{1}{a_m} \leq \frac{1}{m},$$

za svaki $m \in \mathbb{N}$, odakle slijedi $M = 2$.

2. *Prvo rješenje.* Neka je

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1, \quad a_1, \ldots, a_{n-1} \geq 0.$$

Za svaki $x \geq 0$ je $P(x) \geq 1 > 0$ pa su sve nultočke od P negativne. Poznato je da polinom n-tog stupnja ima točno n nultočaka (u skupu kompleksnih brojeva), brojenih s odgovarajućim kratnostima. Neka su $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$ nultočke od P, pri čemu su $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Tada vrijedi

$$P(x) = (x + x_1)(x + x_2) \ldots (x + x_n).$$

Izjednačavanjem slobodnog člana dobivamo $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$ pa nejednakost koju trebamo dokazati glasi

$$(x + x_1)(x + x_2) \ldots (x + x_n) \geq (x + 1)^n,$$

odnosno

$$\sqrt[n]{(x + x_1)(x + x_2) \ldots (x + x_n)} \geq x + 1,$$

uz uvjete $x \geq 0,\ x_1, x_2, \ldots, x_n > 0,\ x_1 x_2 \ldots x_n = 1$.

Za $x = 0$ imamo čak jednakost, a za $x > 0$ koristimo nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine:

$$\frac{x+1}{\sqrt[n]{(x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_n)}} = \frac{\sqrt[n]{x^n} + \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}{\sqrt[n]{(x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_n)}} =$$
$$= \sqrt[n]{\frac{x}{x+x_1} \cdot \frac{x}{x+x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{x+x_n}} + \sqrt[n]{\frac{x_1}{x+x_1} \cdot \frac{x_2}{x+x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x+x_n}} \leq$$
$$\leq \frac{1}{n}\left(\frac{x}{x+x_1} + \frac{x}{x+x_2} + \ldots + \frac{x}{x+x_n}\right)$$
$$+\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x+x_1} + \frac{x_2}{x+x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x+x_n}\right) = 1.$$

Drugo rješenje. Najprije, jednako kao u prethodnom rješenju, zaključimo da P ima negativne nultočke $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$ te da vrijedi

$$P(x) = (x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_n).$$

Množenjem i uspoređivanjem koeficijenata (ili korištenjem Vièteovih formula) dobivamo jednakosti:

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n,\\
a_{n-2} &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_1 &= x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} + \ldots + x_2 \cdot \ldots \cdot x_n,\\
1 &= x_1 \cdot \ldots \cdot x_n.
\end{aligned}$$

Za $k = 1, \ldots, n-1$, upotrebom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine slijedi

$$a_{n-k} \geq \binom{n}{k} \sqrt[\binom{n}{k}]{x_1^{\binom{n-1}{k-1}} x_2^{\binom{n-1}{k-1}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\binom{n-1}{k-1}}} = \binom{n}{k}.$$

Naime, u jednakosti za a_{n-k} na desnoj strani ima $\binom{n}{k}$ pribrojnika, a svaki x_i se pojavljuje $\binom{n-1}{k-1}$ puta (jer na toliko načina možemo odabrati preostalih $k-1$ faktora u produktu).

Preostaje iskoristiti dobivene nejednakosti za koeficijente i binomni teorem:

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + 1 \geq$$
$$\geq x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}x + 1 = (x+1)^n,$$

za svaki $x \geq 0$.

Napomena. Nije teško vidjeti da se jednakost postiže samo kad je $x = 0$ ili $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, tj. $P(x) \equiv (x+1)^n$.

3. Matematičkom indukcijom pokazujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji točno jedan prirodni broj x_n koji se u dekadskom sustavu zapisuje samo znamenkama 2 i 5, ima n znamenaka i djeljiv je s 2^n.

Npr. za $n = 1, 2, 3$ to su brojevi 2, 52, 552. Time je ujedno provjerena baza indukcije.

Za korak indukcije pretpostavimo da je x_n jedinstveni prirodni broj sa znamenkama 2 i 5, koji ima n znamenaka i djeljiv je s 2^n. Brojevi

$$2 \cdot 10^n + x_n \quad \text{i} \quad 5 \cdot 10^n + x_n$$

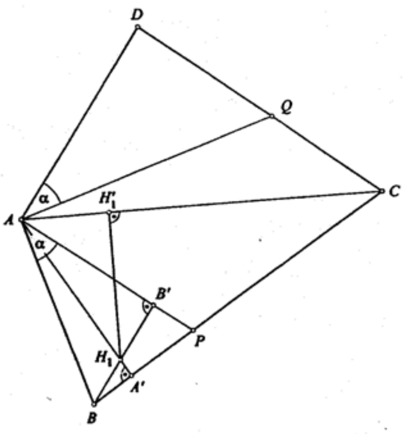
se dobivaju tako da broju x_n s lijeve strane dopišemo znamenku 2 odnosno 5. Oni su očigledno djeljivi s 2^n, a točno jedan od njih je djeljiv s 2^{n+1} i njega uzimamo za x_{n+1}. Naime,

$$\frac{5 \cdot 10^n + x_n}{2^n} - \frac{2 \cdot 10^n + x_n}{2^n} = 3 \cdot 5^n,$$

što je neparan broj pa je točno jedan od brojeva $\dfrac{2 \cdot 10^n + x_n}{2^n}$ i $\dfrac{5 \cdot 10^n + x_n}{2^n}$ paran.

Za dokaz jedinstvenosti još samo primijetimo da u svakom $(n+1)$-znamenkastom broju djeljivom s 2^{n+1} i sa znamenkama 2 i 5 mora na zadnjih n mjesta pisati upravo broj x_n, tj. on mora biti jednak $2 \cdot 10^n + x_n$ ili $5 \cdot 10^n + x_n$.

4. Neka su H_1 i H_2 ortocentri trokuta ABP i ADQ, te neka su H_1' i H_2' njihove ortogonalne projekcije na pravac AC. (Uočimo da H_1' i H_2' zapravo leže negdje na polupravcu s početkom u A kroz točku C.) Pravci H_1H_2 i AC su okomiti ako i samo ako je $H_1' = H_2'$, tj. ako i samo ako je $|AH_1'| = |AH_2'|$.



Koristit ćemo pojam potencije točke u odnosu na kružnicu, odnosno sljedeće svojstvo, koje se lako dokazuje:

Lema. Ako se tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sijeku u točki T, vrijedi

$$|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|.$$

Označimo redom s A' i B' nožišta visina iz vrhova A i B u trokutu ABP. Zbog $\sphericalangle CH_1'H_1 = \sphericalangle CA'H_1 = 90°$ i $\sphericalangle PA'H_1 = \sphericalangle PB'H_1 = 90°$ su četverokuti $CH_1'H_1A'$ i $PB'H_1A'$ tetivni, promatranjem potencije točke A obzirom na njima opisane kružnice dobivamo

$$|AH_1'| \cdot |AC| = |AH_1| \cdot |AA'| = |AB'| \cdot |AP|.$$

Ako označimo $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ = \alpha$, nadalje imamo

$$|AB'| \cdot |AP| = |AB| \cos\alpha \cdot |AP| = \frac{1}{2} |AB|\,|AP| \sin\alpha \cdot 2 \operatorname{ctg}\alpha = 2\,P(ABP) \operatorname{ctg}\alpha$$

pa smo dobili

$$|AH_1'| = \frac{2\,P(ABP) \operatorname{ctg}\alpha}{|AC|},$$

a analogno se izvodi jednakost

$$|AH_2'| = \frac{2\,P(ADQ) \operatorname{ctg}\alpha}{|AC|}.$$

Zato je $|AH_1'| = |AH_2'|$ ako i samo ako je $P(ABP) = P(ADQ)$.