MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

ŽUPANIJSKO NATJECANJE MLADIH MATEMATIČARA REPUBLIKE HRVATSKE

Zadaci za 7. razred

14. ožujka 2006.

1. Riješi jednadžbu

$$\left(1+\frac{1}{2006}\right):\frac{2007}{2005}+\frac{1}{x}-\left(2-0.2\cdot\frac{10}{3}\right):\frac{4}{3}=1-1:\frac{0.2-0.05}{0.8-0.65}.$$

2. Ukupan urod voća u dva voćnjaka bio je jedne godine 225 tona, a sljedeće je godine ukupan urod porastao za 40%. Koliki je bio urod voća prve godine u svakom voćnjaku, ako je druge godine urod povećan u prvom voćnjaku za 25%, a u drugom voćnjaku za 50%?

3. U raznostraničnom trokutu ABC simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Neka je M točka stranici $\overline{AB}$ takva da je $|BM|=|BD|$, a N točka na produžetku stranice $\overline{AC}$, preko vrha C, takva da je $|CN|=|CD|$. Dokaži da su kutovi $\sphericalangle DMA$ i $\sphericalangle NDA$ jednaki.

4. Zadan je paralelogram $ABCD$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka K, tako da je $|AK|:|AB|=5:7$, a na stranici $\overline{CD}$ odabrana je točka N, tako da je $|DN|:|NC|=2:3$. U kojem omjeru dužina $\overline{KN}$ dijeli dijagonalu $\overline{BD}$, računajući od točke D?

5. Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{abc}$, tako da pri dijeljenju tog broja sa dvoznamenkastim brojem $\overline{bc}$ dobivamo količnik 7 i ostatak 20.

ŽUPANIJSKO 2006.

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Sređivanjem dane jednadžbe dobivamo $\frac{2007}{2006} \cdot \frac{2005}{2007} + \frac{1}{x} - \left(2 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} = 1 - 1 : \frac{0.15}{0.15}$, 3 BODA

odnosno $\frac{2005}{2006} + \frac{1}{x} - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1 - 1 : 1$, odakle je $\frac{2005}{2006} + \frac{1}{x} - 1 = 1 - 1$. 3 BODA

Sada je $\frac{1}{x} = 1 - \frac{2005}{2006} = \frac{1}{2006}$. 2 BODA

Konačno, slijedi da je rješenje dane jednadžbe $x = 2006$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Ako je urod voća u prvom voćnjaku prve godine bio x tona, onda je druge godine urod voća u prvom voćnjaku bio $1.25x$ tona. 1 BOD

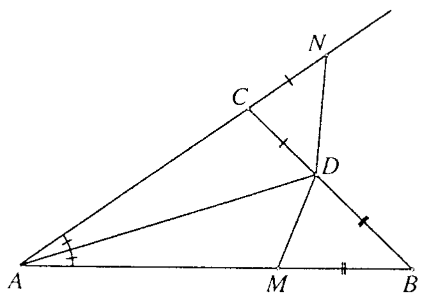
Prema uvjetu zadatka, u drugom voćnjaku je urod voća prve godine bio $225 - x$ tona, a druge $1.5(225 - x) = 337.5 - 1.5x$ tona. 2 BODA

Kako je ukupan urod voća u drugoj godini porastao za 40%, vrijedi jednadžba
$1.25x + 337.5 - 1.5x = 1.4 \cdot 225 = 315$, odnosno $-0.25x = -22.5$, odakle je $x = 90$. 5 BODOVA

Konačno, u prvom je voćnjaku urod prve godine bio 90 tona, a u drugom $225 - 90 = 135$ tona. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. SKICA



1 BOD

Trokut DMB je jednakokračan, pa je $\sphericalangle BMD = 90° - \frac{\sphericalangle ABC}{2}$. 1 BOD

Kako je $\sphericalangle DMA$ vanjski kut trokuta DMB, vrijedi
$\sphericalangle DMA = 180° - \sphericalangle DMB = 180° - \left(90° - \frac{\sphericalangle ABC}{2}\right) = 90° + \frac{\sphericalangle ABC}{2}$. 2 BODA

Kako je trokut DNC jednakokračan, slijedi da je $\sphericalangle AND = \frac{\sphericalangle BCA}{2}$. 1 BOD

Promatrajmo sada trokut NAD. Za kut $\sphericalangle NDA$ vrijedi

$$\begin{aligned}\sphericalangle NDA &= 180° - \sphericalangle DAN - \sphericalangle AND = 180° - \frac{\sphericalangle BAC}{2} - \frac{\sphericalangle BCA}{2} \\ &= 180° - \frac{\sphericalangle BAC + \sphericalangle BCA}{2} = 180° - \frac{180° - \sphericalangle ABC}{2} = 90° + \frac{\sphericalangle ABC}{2}\end{aligned}$$

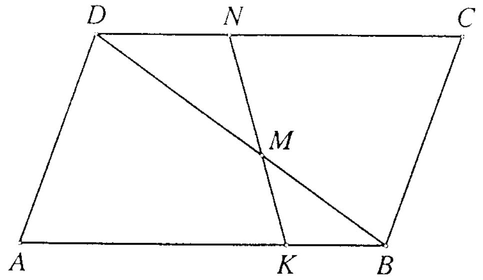
4 BODA

Dakle, $\sphericalangle DMA = \sphericalangle NDA = 90° + \frac{\sphericalangle ABC}{2}$, čime je dokaz gotov. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO VII. RAZRED 2006.

4. SKICA



Iz omjera $|AK| : |AB| = 5 : 7$ slijedi $7|AK| = 5|AB|$, 1 BOD

odakle je $|AK| = \frac{5}{7}|AB|$, odnosno $|KB| = \frac{2}{7}|AB|$. 2 BODA

Slično, iz omjera $|DN| : |NC| = 2 : 3$ slijedi $3|DN| = 2|NC|$,

odakle je $|DN| = \frac{2}{3}|NC|$, odnosno $|DN| = \frac{2}{5}|CD|$. 2 BODA

Uočimo da su trokuti KBM i DNM slični. Ta sličnost slijedi zbog jednakosti

$\sphericalangle KMB = \sphericalangle DMN$ (vršni kutovi) i $\sphericalangle KBD = \sphericalangle NDB$ (kutovi uz presječnicu $\overline{BD}$). 2 BODA

Iz dokazane sličnosti slijedi

$$\frac{|DM|}{|MB|} = \frac{|DN|}{|KB|} = \frac{\frac{2}{5}|CD|}{\frac{2}{7}|AB|} = \frac{2 \cdot 7|AB|}{2 \cdot 5|AB|} = \frac{7}{5},$$

odnosno $|DM| : |MB| = 7 : 5$. 3 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Iz uvjeta zadatka slijedi $\overline{abc} = 7 \cdot \overline{bc} + 20$, odnosno $100a + \overline{bc} = 7 \cdot \overline{bc} + 20$,

odakle je $100a = 6 \cdot \overline{bc} + 20$. 2 BODA

Kako su brojevi $100a$ i 20 djeljivi sa 10, pa iz prethodne jednakosti slijedi da je

dvoznamenkasti broj $\overline{bc}$ djeljiv sa 10. To je moguće samo ako je $c = 0$ ili $c = 5$. 2 BODA

Za $c = 0$ dobivamo da je $100a = 60b + 20$, odnosno $10a = 6b + 2$.

Desna strana jednakosti $6b + 2$ bit će djeljiva s 10 samo ako je $b = 3$ ili $b = 8$. 2 BODA

Ako je $b = 3$, slijedi da je $a = 2$, pa za rješenje dobivamo broj 230. 1 BOD

Ako je $b = 8$, slijedi da je $a = 5$, pa za rješenje dobivamo broj 580. 1 BOD

Ako je $c = 5$ dobivamo da je $100a = 6(10b + 5) + 20$, odakle je

$100a = 60b + 50$, odnosno $10a = 6b + 5$. Ta jednakost nije moguća jer je

lijeva strana paran, a desna neparan broj. 2 BODA

Dakle, sva rješenja su brojevi 230 i 580.

.... UKUPNO 10 BODOVA