MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, općinsko-gradsko natjecanje
Zadaci za **I. razred** srednje škole, **B varijanta**
13. veljače 2006.

1. Koja se znamenka nalazi na 2006. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{469}{1998}$?

2. Dokaži da je suma kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiva sumom tih triju brojeva.

3. Tajnica je izračunala da bi tipkanje knjige završila tri sata prije roka ako bi svakog sata otipkala dvije stranice preko norme, a ako bi svakog sata otipkala četiri stranice preko norme, onda bi to uradila pet sati prije roka.

   Koliko ukupno stranica tajnica treba otipkati i u kojem roku?

4. Riješi po x jednadžbu
$$\frac{2p-5}{x+2} = \frac{3x+4}{x^2+3x+2}(p-1) + \frac{3}{x+1}(p-1).$$
   Za koje vrijednosti realnog parametra p je rješenje jednadžbe manje od -2 ?

5. Nad stranicama kvadrata duljine 1, prema van su konstruirani jednakokračni trapezi tako da su vrhovi svih trapeza ujedno vrhovi pravilnog dvanaesterokuta. Koliki je opseg tog dvanaesterokuta?

Općinsko natjecanje 2006., I. razred, B varijanta – rješenja zadataka

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Koja se znamenka nalazi na 2006. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{469}{1998}$?

Rješenje.

$$\frac{469}{1998} = 469 : 1998 = 0.2347347\ldots \qquad \text{(8 bodova)}$$

Napomena. Upotreba kalkulatora nije dozvoljena!

Uočavamo da se (nakon znamenke 2 na prvom decimalnom mjestu) ponavlja period od tri znamenke 347. (2 boda)

On se ponavlja 668 puta, jer je

$$2005 = 668 \cdot 3 + 1. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Na 2006. mjestu nalazi se prva znamenka perioda, broj 3. (5 bodova)

2. Dokaži da je suma kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiva sumom tih triju brojeva.

Rješenje.
Označimo li srednji od tih brojeva s n, ta tri broja su $n-1$, n i $n+1$.

Njihova suma je $(n-1)+n+(n+1)=3n$. (5 bodova)

Suma njihovih kubova je

$$\begin{aligned}(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 &= (n^3-3n^2+3n-1)+n^3+(n^3+3n^2+3n+1)\\ &= 3n^3+6n.\end{aligned}$$

(10 bodova)

Sada vidimo da tvrdnja vrijedi jer je $3n^3+6n = 3n(n^2+2)$ očito djeljivo s $3n$.

(5 bodova)

Napomena. Ako brojeve označimo s n, $n+1$ i $n+2$, njihova suma je $3n+3$, a suma njihovih kubova $3(n+1)(n^2+2n+3)$.

3. Tajnica je izračunala da bi tipkanje knjige završila tri sata prije roka ako bi svakog sata otipkala dvije stranice preko norme, a ako bi svakog sata otipkala četiri stranice preko norme, onda bi to uradila pet sati prije roka.

Koliko ukupno stranica tajnica treba otipkati i u kojem roku?

Rješenje.
Označimo s x broj stranica koje tajnica po normi mora svaki sat otipkati, a y broj sati za koje mora završiti tipkanje.

Ukupan broj stranica koje tajnica treba otipkati je xy. (2 boda)

Prvi podatak u zadatku može se izraziti jednadžbom $(x+2)(y-3) = xy$, (5 bodova)
a drugi $(x+4)(y-5) = xy$. (5 bodova)

Sređivanjem jednadžbe postaju

$$-3x + 2y - 6 = 0$$
$$-5x + 4y - 20 = 0$$

pa je rješenje $x = 8$, $y = 15$. (5 bodova)

Tajnica treba ukupno otipkati 120 stranica, i to u 15 sati. (3 boda)

4. Riješi po x jednadžbu

$$\frac{2p-5}{x+2} = \frac{3x+4}{x^2+3x+2}(p-1) + \frac{3}{x+1}(p-1).$$

Za koje vrijednosti realnog parametra p je rješenje jednadžbe manje od -2 ?

Rješenje.

Da bi nazivnici bili različiti od nule, mora biti $x \neq -2$ i $x \neq -1$.

Pomnožimo jednadžbu sa zajedničkim nazivnikom $(x+1)(x+2)$, pa dobivamo:

$$(2p-5)(x+1) = (3x+4)(p-1) + 3(x+2)(p-1). \qquad \text{(3 boda)}$$

Nakon sređivanja jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$x(1-4p) = 8p-5,$$

pa je za $p \neq \frac{1}{4}$ rješenje $x = \dfrac{8p-5}{1-4p}$. (5 bodova)

Za $p = \frac{1}{4}$ jednadžba nema rješenja.

No, još treba provjeriti da je $x \neq -2$ i $x \neq -1$.

$$x = -2 \Leftrightarrow \frac{8p-5}{1-4p} = -2 \Leftrightarrow 8p-5 = -2(1-4p) \Leftrightarrow -5 = -2,$$

$$x = -1 \Leftrightarrow \frac{8p-5}{1-4p} = -1 \Leftrightarrow 8p-5 = -(1-4p) \Leftrightarrow 4p = 4 \Leftrightarrow p = 1.$$

Znači, ni za koji p nije $x = -2$, a samo za $p = 1$ je $x = -1$. Dakle, jednadžba nema rješenja ni za $p = 1$. (5 bodova)

Odgovorimo sada na postavljeno pitanje: za koje p je $x < -2$?

Treba riješiti nejednadžbu $\dfrac{8p-5}{1-4p} < -2$, koja je ekvivalentna s

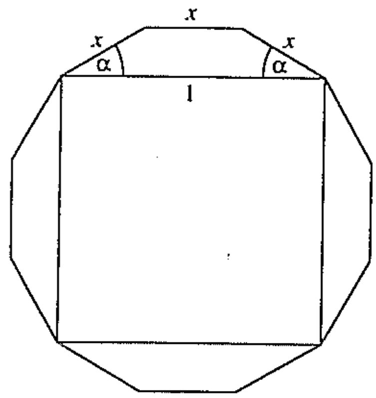
$$\frac{8p-5+2(1-4p)}{1-4p} < 0,$$

odnosno $\dfrac{-3}{1-4p} < 0$ tj. $1-4p > 0$.

Odgovor je dakle: za sve $p < \dfrac{1}{4}$. (7 bodova)

5. Nad stranicama kvadrata duljine 1, prema van su konstruirani jednakokračni trapezi tako da su vrhovi svih trapeza ujedno vrhovi pravilnog dvanaesterokuta. Koliki je opseg tog dvanaesterokuta?

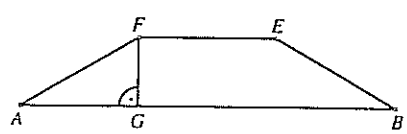
Rješenje.
Unutarnji kut pravilnog dvanaesterokuta je 150°, (2 boda)



pa vrijedi

$$2\alpha + 90^\circ = 150^\circ, \ \alpha = 30^\circ. \qquad \text{(3 boda)}$$

Izdvojimo jedan trapez:



Ako su duljine $|AF| = |FE| = |EB| = x$ i $|AB| = 1$, tada je

$$|AG| = \frac{1-x}{2}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Trokut AGF je pola jednakostraničnog trokuta stranice duljine x,
pa njegova visina $|AG|$ iznosi $\frac{x\sqrt{3}}{2}$. (3 boda)
Zato je

$$\frac{1-x}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{(4 boda)}$$

odnosno $x\left(1+\sqrt{3}\right) = 1$, te konačno

$$x = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Zato je opseg dvanaesterokuta $O = 12x = 6(\sqrt{3}-1)$. (2 boda)

Napomena. Dijelovi ovog zadatka mogu se riješiti na različite načine. U svakom slučaju, određivanje kuta između stranice kvadrata i dvanaesterokuta boduje se s 5 bodova, postavljanje jednadžbe čije je rješenje stranica dvanaesterokuta s 10 bodova, te rješenje te jednadžbe i konačan rezultat s još 5 bodova.