MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, općinsko-gradsko natjecanje

Zadaci za IV. razred srednje škole, B varijanta

13. veljače 2006.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{i} \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

2. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

3. Dane su točke $A(-3,6)$ i $B(6,3)$. Odredi skup svih točaka čija je udaljenost do točke A dvostruko veća od udaljenosti do točke B. Nacrtaj dobivenu krivulju u koordinatnom sustavu te odredi njezina sjecišta s koordinatnim osima.

4. Dana su dva aritmetička niza:

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \ldots$$

$$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \ldots$$

Izračunaj zbroj prvih 2006 zajedničkih članova tih dvaju nizova.

5. Odredi najmanji prirodni broj n takav da je $\frac{11!}{n}$ kvadrat prirodnog broja.

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{i} \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

Rješenje.

Dane uvjete možemo zapisati: $3|z-12| = 5|z-8i|$ i $|z-4| = |z-8|$, (2 bodova)

odnosno uz $z = x + iy$:

$$9\left((x-12)^2 + y^2\right) = 25\left(x^2 + (y-8)^2\right),$$
$$(x-4)^2 + y^2 = (x-8)^2 + y^2.$$

(5 bodova)

Riješimo taj sustav.

Najprije zaključujemo $x - 4 = \pm(x-8)$, a jedina je mogućnost $x = 6$.

(4 boda)

Sada iz prve jednadžbe dobivamo $9\left(36 + y^2\right) = 25\left(36 + (y-8)^2\right)$,

odnosno nakon sređivanja: $y^2 - 25y + 136 = 0$.

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $y_1 = 17$ i $y_2 = 8$. (7 bodova)

Traženi kompleksni brojevi su $z_1 = 6 + 17i$ i $z_2 = 6 + 8i$. (2 boda)

2. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

Rješenje.

Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.

Baza indukcije, tj. nejednakost za $n = 1$, je naprosto $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$.

(5 bodova)

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+1)+1} + \cdots + \frac{1}{3(n+1)+1} = \\
&= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}\right) + \left(\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

(8 bodova)

pa je za završetak koraka indukcije dovoljno pokazati da vrijedi

$$\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+4} \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{3n+3},$$

tj.

$$\frac{6n+6}{(3n+2)(3n+4)} \geq \frac{2}{3n+3},$$

što nakon množenja postaje

$$18n^2 + 36n + 18 \geq 18n^2 + 36n + 16,$$

a to očigledno vrijedi. (7 bodova)

Alternativno rješenje.
Na $2n+1$ razlomaka iz zadatka primijenimo aritmetičko-harmonijsku nejednakost:

$$\frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}}{2n+1} > \frac{2n+1}{(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n+1)}.$$

Nejednakost je stroga jer brojevi $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{3n+1}$ nisu svi međusobno jednaki.
(15 bodova)

Zbroj u nazivniku ćemo izračunati korištenjem formule za zbroj uzastopnih članova aritmetičkog niza. Dakle vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} &> \frac{(2n+1)^2}{(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n+1)} \\ &= \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)\cdot\frac{4n+2}{2}} = 1. \end{aligned}$$

(5 bodova)

Napomena.
Zadatak se može riješiti i grupiranjem po dva člana (prvi i zadnji, drugi i predzadnji, . . . , a srednji ostaje sam), koristeći

$$\frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{3n+1-k} = \frac{4n+2}{(2n+1)^2 - (n-k)^2} > \frac{2}{2n+1}.$$

3. Dane su točke $A(-3,6)$ i $B(6,3)$. Odredi skup svih točaka čija je udaljenost do točke A dvostruko veća od udaljenosti do točke B. Nacrtaj dobivenu krivulju u koordinatnom sustavu te odredi njezina sjecišta s koordinatnim osima.

Rješenje.
Neka je $T(x,y)$ točka na traženoj krivulji. Dani uvjet $d(A,T) = 2d(B,T)$ možemo raspisati kao

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-6)^2} = 2\sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2},$$ (5 bodova)

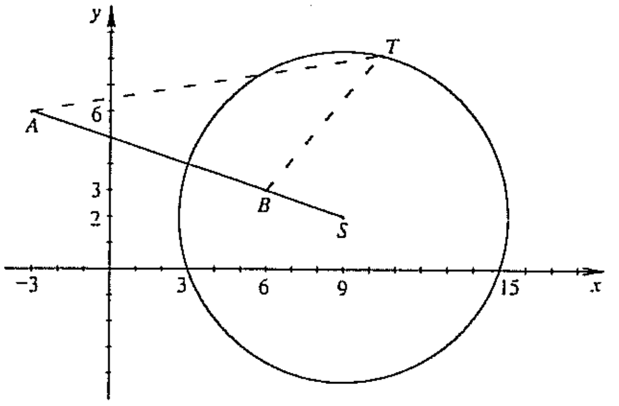
što nakon kvadriranja

$$(x+3)^2 + (y-6)^2 = 4((x-6)^2 + (y-3)^2)$$

i sređivanja

$$x^2 + y^2 - 18x - 4y + 45 = 0$$

postaje $(x-9)^2 + (y-2)^2 = 40.$ (5 bodova)



(5 bodova)

Traženi skup točaka je kružnica sa središtem u točki $S(9,2)$, polumjera $r = 2\sqrt{10}$.

Sjecišta s osi x dobivamo rješavanjem sustava

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y-2)^2 = 40 \\ y = 0 \end{cases}$$

To su točke $(3,0)$ i $(15,0)$. (3 boda)

Kružnica ne siječe os y, jer udaljenost središta od osi y iznosi 9, i veća je od polumjera kružnice. (Isto se može zaključiti i rješavanjem sustava.) (2 boda)

4. Dana su dva aritmetička niza:

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \ldots$$

$$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \ldots$$

Izračunaj zbroj prvih 2006 zajedničkih članova tih dvaju nizova.

Rješenje.

Napišimo još po nekoliko članova tih dvaju nizova:

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25\ \ldots$$

$$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ 31\ \ldots$$

Prvi zajednički član ta dva niza je 1, a slijedeći je 21. Pokazat ćemo da zajednički članovi tog niza tvore novi aritmetički niz (čija su prva dva člana 1 i 21).

(5 bodova)

Uočimo, $a_k = 1 + 4(k-1)$, $b_k = 1 + 5(k-1)$. Iz $a_m = b_n$ slijedi $4(m-1) = 5(n-1)$. Zato 5 dijeli $m-1$, tj. $m = 5m_1 + 1$ i analogno $n = 4n_1 + 1$, a ponovnim uvrštavanjem slijedi $m_1 = n_1$. Dakle, zajednički članovi nizova su oblika $1 + 20m_1$. Dakle, zajednički članovi čine aritmetički niz s prvim članom 1 i razlikom 20.

(10 bodova)

Zato je suma prvih 2006 zajedničkih članova:

$$S_{2006} = \frac{2006}{2} \cdot (2 \cdot 1 + 2005 \cdot 20) = 40222306. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Napomena. Ako učenik koristi, a ne dokaže činjenicu da ti članovi čine aritmetički niz odgovarajućih 10 bodova ne dobiva, ali ostale bodove može dobiti.

5. Odredi najmanji prirodni broj n takav da je $\frac{11!}{n}$ kvadrat prirodnog broja.

Rješenje.
Rastavimo na faktore 11!.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

(5 bodova)

Kvadrat prirodnog broja (potpun kvadrat) ima u rastavu na proste faktore samo parne eksponente. (5 bodova)

Broj 11! treba podijeliti sa $7 \cdot 11 = 77$ da bismo dobili potpuni kvadrat.

Dakle, $n = 77$. (10 bodova)

Napomena. $\frac{11!}{77} = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 = 720^2$.