MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, općinsko-gradsko natjecanje
Zadaci za **III.** razred srednje škole, **B** varijanta
13. veljače 2006.

1. Ako vrijedi
$$\log\frac{m+n}{3}=\frac{1}{2}\left(\log m+\log n\right),$$
dokaži da je $m^2+n^2=7mn$.

2. Riješi jednadžbu
$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}.$$

3. Ako je $\sin t+\cos t=x$ i $\sin^3 t+\cos^3 t=y$, dokaži da je $y=\dfrac{3x-x^3}{2}$.

4. Duljine stranica paralelograma $ABCD$ su $|AB|=13$ i $|BC|=14$, a duljina jedne dijagonale $|AC|=21$. Odredi duljinu druge dijagonale.

5. U uspravni stožac čija je osnovka krug polumjera 15 upisana je kugla polumjera 10. Odredi polumjer kružnice duž koje se stožac i kugla dodiruju.

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Ako vrijedi

$$\log\frac{m+n}{3}=\frac{1}{2}(\log m+\log n),$$

dokaži da je $m^2+n^2=7mn$.

Rješenje.
Iz dane jednakosti redom slijedi

$$\log\frac{m+n}{3}=\frac{1}{2}\log(mn), \qquad \text{(5 bodova)}$$

$$\log\frac{m+n}{3}=\log(mn)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{(5 bodova)}$$

$$\frac{m+n}{3}=(mn)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{(5 bodova)}$$

$$(m+n)^2=9mn,$$

odakle konačno dobivamo $m^2+n^2=7mn$. (5 bodova)

2. Riješi jednadžbu

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}.$$

Prvo rješenje.
Kvadriranjem jednakosti $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ dobivamo $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$,
(4 boda)

pa je dana jednadžba ekvivalentna sa $2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3}{8}$.

Slijedi $\sin^2 2x=\frac{3}{4}$. (6 bodova)

Iz $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ slijedi

$$2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \quad \text{ili} \quad 2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Iz $\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ slijedi

$$2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \quad \text{ili} \quad 2x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Dakle, rješenja dane jednadžbe su

$$x\in\left\{-\frac{\pi}{3}+k\pi, -\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{3}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Drugo rješenje.
Neka je $t = \sin^2 x$. Tada je $\sin^4 x = t^2$ i $\cos^4 x = (1-t)^2$. (4 boda)

Zato umjesto polazne jednadžbe rješavamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + (1-t)^2 = \frac{5}{8} \qquad \text{(4 boda)}$$

Sređivanjem dobivamo $2t^2 - 2t + \frac{3}{8} = 0$, što ima rješenja $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{3}{4}$. (2 boda)

Sada iz $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ slijedi $\sin x = \pm\frac{1}{2}$,

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Iz $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ dobivamo $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ odnosno

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi. \qquad \text{(5 bodova)}$$

3. Ako je $\sin t + \cos t = x$ i $\sin^3 t + \cos^3 t = y$, dokaži da je $y = \dfrac{3x - x^3}{2}$.

Rješenje.
Iz $\sin t + \cos t = x$ slijedi

$$x^2 = 1 + 2\sin t \cdot \cos t, \qquad \text{(5 bodova)}$$

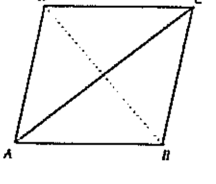
pa vrijedi $\sin t \cdot \cos t = \dfrac{x^2 - 1}{2}$.
Zato je

$$\begin{aligned} y = \sin^3 t + \cos^3 t &= (\sin t + \cos t)(\sin^2 t - \sin t \cdot \cos t + \cos^2 t) && \text{(5 bodova)} \\ &= (\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cdot \cos t) && \text{(5 bodova)} \\ &= x\left(1 - \frac{x^2 - 1}{2}\right) = \frac{3x - x^3}{2}, && \text{(5 bodova)} \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

4. Duljine stranica paralelograma $ABCD$ su $|AB| = 13$ i $|BC| = 14$, a duljina jedne dijagonale $|AC| = 21$. Odredi duljinu druge dijagonale.

Rješenje.
Primijenimo kosinusov poučak na trokut ABC.



$$\cos \sphericalangle ABC = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2|AB||BC|} = \frac{169 + 196 - 441}{2 \cdot 13 \cdot 14} = -\frac{19}{91}.$$

(7 bodova)

Kako je $\sphericalangle DAB = \pi - \sphericalangle ABC$, $\cos\sphericalangle DAB = -\cos\sphericalangle ABC = \frac{19}{91}$. (4 boda)

Primijenimo sada kosinusov poučak na trokut DAB:

$$|DB|^2 = |DA|^2 + |AB|^2 - 2|DA||AB|\cos\sphericalangle DAB = 14^2 + 13^2 - 2\cdot 14\cdot 13\cdot\frac{19}{91} = 289.$$

(7 bodova)

Dakle, duljina druge dijagonale je $|BD| = 17$. (2 boda)

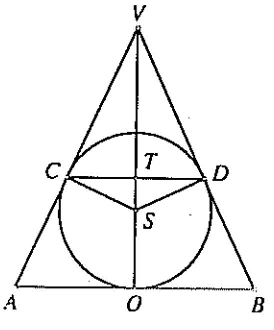
5. U uspravni stožac čija je osnovka krug polumjera 15 upisana je kugla polumjera 10. Odredi polumjer kružnice duž koje se stožac i kugla dodiruju.

Prvo rješenje.

Promotrimo presjek stošca ravninom okomitom na osnovicu, koja sadrži os stošca.

Uz oznake kao na slici vrijedi $|AO| = 15$ i $|CS| = |SO| = 10$, a treba odrediti $|TC|$.

Neka je $\sphericalangle CAO = 2\alpha$. Tada je $\sphericalangle TCS = 90^\circ - \sphericalangle VCT = 90^\circ - 2\alpha$. (5 bodova)



Vrijedi $|TC| = |CS|\cos\sphericalangle TCS = |CS|\sin 2\alpha$. (5 bodova)

Nadalje, znamo da je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|SO|}{|AO|} = \frac{2}{3}$. (3 boda)

Zato je $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{12}{13}$. (5 bodova)

Konačno, $|TC| = |CS|\sin 2\alpha = \frac{120}{13}$. (2 boda)

Drugo rješenje.

Označimo $|VA| = s$ i $|VO| = v$.

Na pravokutne trokute AOV i CSV primijenimo Pitagorin poučak:

$$v^2 + 15^2 = s^2, \qquad (v-10)^2 = (s-15)^2 + 10^2.$$ (5 bodova)

Rješavanjem ovog sustava dobije se $v = 36$, $s = 39$. (10 bodova)

Sada npr. iz sličnosti trokuta AOV i CTV dobivamo:

$$|CT| = \frac{|AO|\cdot|CV|}{AV} = \frac{15\cdot(39-15)}{39} = \frac{120}{13}.$$ (5 bodova)