MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, općinsko-gradsko natjecanje
Zadaci za **II. razred** srednje škole, **B varijanta**
13. veljače 2006.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi:

$$\operatorname{Re} z = 5 \cdot \operatorname{Im} z \qquad \text{i} \qquad |z - (a + ib)| = 5,$$

gdje su a i b ($a > b$) rješenja kvadratne jednadžbe

$$(x-1)^2 + 3(x-1) - 4 = 0.$$

2. U drugim razredima neke škole ima između 100 i 300 učenika. Za vrijeme jedne priredbe ravnatelj ih je namjeravao postaviti u redove. Ako bi ih stavio u 8 redova, jedan bi učenik bio viška. Ako bi ih stavio u 7 redova, dva bi učenika bila viška. Ako bi ih stavio u 6 redova, preostalo bi 5 učenika. Koliko ima ukupno učenika u drugim razredima te škole?

3. Promatrajmo skup polinoma drugog stupnja oblika

$$f_m(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1,$$

gdje je m realni parametar.

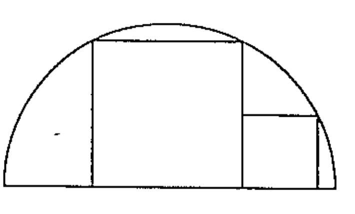
a) Koji skup tvore tjemena svih parabola $y = f_m(x)$?

b) Koja od parabola $y = f_m(x)$ ima tjeme na osi apscisa, a kojoj je tjeme na osi ordinata?

c) Za koje m polinom f_m ima pozitivne vrijednosti za sve realne x ?

4. U polukrug su upisana dva kvadrata kao na slici.

Ako je površina manjeg kvadrata 16, kolika je površina većeg? Obrazloži svoj zaključak!



5. Opseg paralelograma iznosi 144. Duljine njegovih visina odnose se kao 5 : 7, a mjere unutarnjih kutova kao 1 : 2. Izračunaj površinu paralelograma.

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi:

$$\operatorname{Re} z = 5 \cdot \operatorname{Im} z \qquad \text{i} \qquad |z - (a + ib)| = 5,$$

gdje su a i b $(a > b)$ rješenja kvadratne jednadžbe

$$(x-1)^2 + 3(x-1) - 4 = 0.$$

Rješenje.
Jednadžba je već napisana kao kvadratna jednadžba po $(x - 1)$.
Dobiva se $(x-1)_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2}$, tj. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. (5 bodova)

Napomena: Sređivanjem se dobiva jednadžba $x^2 + x - 6 = 0$ koja se također lagano rješava.

Tražimo kompleksan broj $z = x + iy$.

Iz prvog uvjeta je $x = 5y$.

Drugi uvjet može se zapisati u obliku $|x + yi - 2 + 3i| = 5$.

(5 bodova)

Odavde redom dobivamo:

$$|5y + yi - 2 + 3i| = 5,$$
$$(5y-2)^2 + (y+3)^2 = 25,$$
$$13y^2 - 7y - 6 = 0. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $y_1 = 1$ i $y_2 = -\dfrac{6}{13}$.

Zatim dobivamo $x_1 = 5$ i $x_2 = -\dfrac{30}{13}$.

Time smo dobili dva kompleksna broja $z_1 = 5 + i$ i $z_2 = -\dfrac{30}{13} - \dfrac{6}{13}i$. (5 bodova)

2. U drugim razredima neke škole ima između 100 i 300 učenika. Za vrijeme jedne priredbe ravnatelj ih je namjeravao postaviti u redove. Ako bi ih stavio u 8 redova, jedan bi učenik bio viška. Ako bi ih stavio u 7 redova, dva bi učenika bila viška. Ako bi ih stavio u 6 redova, preostalo bi 5 učenika. Koliko ima ukupno učenika u drugim razredima te škole?

Prvo rješenje.
Označimo li broj učenika s x tada postoje prirodni brojevi k, l i m takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} x &= 8k + 1, \\ x &= 7l + 2, \\ x &= 6m + 5. \end{aligned}$$

(4 boda)

Iz prva dva uvjeta dobivamo:

$$8k = 7l + 1 \Rightarrow 8(k-1) = 7(l-1) \Rightarrow k = 7a + 1 \text{ i } l = 8a + 1, \; a \in \mathbb{N}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Iz druga dva uvjeta imamo:

$$7l = 6m + 3 \Rightarrow 7(l-3) = 6(m-3) \Rightarrow l = 6b + 3 \text{ i } m = 7b + 3, \; b \in \mathbb{N}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Odavde dobivamo

$$\begin{aligned} 8a + 1 &= 6b + 3, \\ 8a &= 6b + 2 \quad / : 2 \\ 4(a-1) &= 3(b-1). \end{aligned}$$

Zato postoji pozitivan cijeli broj p takav da je $a - 1 = 3p$, tj. $a = 3p + 1$. (4 boda)

Slijedi,

$$x = 8k + 1 = 8 \cdot [7a + 1] + 1 = 8 \cdot [7 \cdot (3p+1) + 1] + 1 = 168p + 65. \qquad \text{(2 boda)}$$

Uvjet $100 < x < 300$ zadovoljava jedino $p = 1$, odnosno. $x = 233$. (2 boda)

Drugo rješenje.
Budući da je $x = 8k + 1$, mogući su ovi brojevi:

$$\begin{aligned} x \;=\; & 105,\ 113,\ 121,\ 129,\ 137,\ 145,\ 153,\ 161,\ 169,\ 177,\ 185,\ 193,\ 201, \\ & 209,\ 217,\ 225,\ 233,\ 241,\ 249,\ 257,\ 265,\ 273,\ 281,\ 289,\ 297. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Od ovih brojeva uvjet $x = 7l + 2$ zadovoljavaju

$$x = 121,\ 177,\ 233,\ 289. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Od ovih brojeva uvjet $x = 6m + 5$ zadovoljava samo

$$x = 233.$$

Dakle, u drugim razredima ima ukupno 233 učenika. (5 bodova)

3. Promatrajmo skup polinoma drugog stupnja oblika

$$f_m(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1,$$

gdje je m realni parametar.

a) Koji skup tvore tjemena svih parabola $y = f_m(x)$?

b) Koja od parabola $y = f_m(x)$ ima tjeme na osi apscisa, a kojoj je tjeme na osi ordinata?

c) Za koje m polinom f_m ima pozitivne vrijednosti za sve realne x ?

Rješenje.
a) Koordinate tjemena parabole $y = f_m(x)$ su

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -m - \frac{1}{2}, \qquad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -m - \frac{5}{4}. \qquad \text{(4 boda)}$$

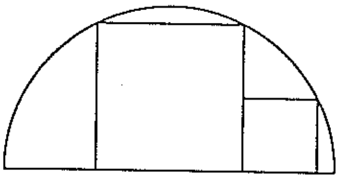
Oduzimanjem ovih dviju jednadžbi dobijemo $x_0 - y_0 = \frac{3}{4}$ i zaključujemo da je traženi skup točaka pravac. (3 boda)

b) Tjeme je na osi apscisa kada je $y_0 = 0$, tj. za $m = -\dfrac{5}{4}$. (3 boda)

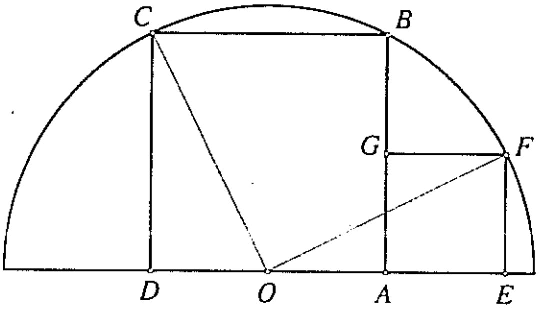
Tjeme je na osi ordinata kada je $x_0 = 0$, tj. za $m = -\dfrac{1}{2}$. (3 boda)

c) Vodeći je koeficijent svih polinoma 1, pa $f_m(x)$ ima pozitivne vrijednosti za sve x ako je $D < 0$, odnosno $(2m+1)^2 - 4(m^2-1) = 4m+5 < 0$, tj. za $m < -\dfrac{5}{4}$. (7 bodova)

4. U polukrug su upisana dva kvadrata kao na slici. Ako je površina manjeg kvadrata 16, kolika je površina većeg? Obrazloži svoj zaključak!



Rješenje.
Neka je r polumjer kružnice i a duljina stranice većeg kvadrata. Duljina stranice manjeg kvadrata je 4. (2 boda)



Iz pravokutnog trokuta CDO dobivamo: $r^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2$, (4 boda)

a iz pravokutnog trokuta EFO: $r^2 = \left(\dfrac{a}{2} + 4\right)^2 + 4^2$. (4 boda)

Izjednačavanjem

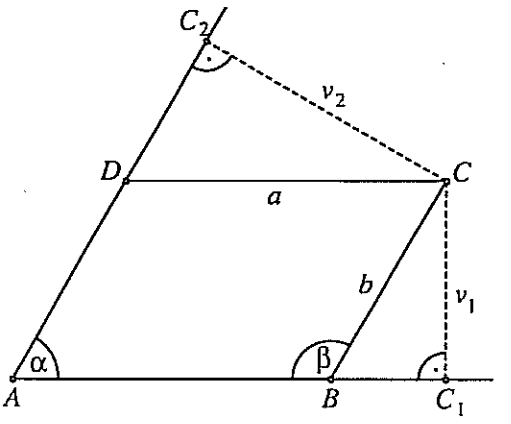
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{a}{2} + 4\right)^2 + 4^2$$

dobivamo kvadratnu jednadžbu $a^2 - 4a - 32 = 0$, s rješenjima $a = 8$ i $a = -4$. (7 bodova)

Negativno rješenje odbacujemo, pa je stranica većeg kvadrata duljine 8, a njegova površina 64. (3 boda)

5. Opseg paralelograma iznosi 144. Duljine njegovih visina odnose se kao 5 : 7, a mjere unutarnjih kutova kao 1 : 2. Izračunaj površinu paralelograma.

Rješenje.
Neka su kutovi paralelograma α i β. Tada je $\alpha + \beta = 180°$, $\alpha : \beta = 1 : 2$, pa je $\alpha = 60°$ i $\beta = 120°$. (3 boda)



Trokuti CBC_1 i CDC_2 (vidi oznake na slici) su slični, pa je $b : a = v_1 : v_2 = 5 : 7$.
(5 bodova)

Kako je poznat opseg $2a + 2b = 144$, dobivamo $a = 42$ i $b = 30$. (5 bodova)

Trokut CBC_1 je polovica jednakostraničnog trokuta, pa je $v_1 = \dfrac{b\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$. (4 boda)

Konačno, površina paralelograma je $P = av_1 = 630\sqrt{3}$. (3 boda)