MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, općinsko-gradsko natjecanje

Zadaci za **IV. razred** srednje škole, **A varijanta**

13. veljače 2006.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \qquad \text{i} \qquad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

2. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

3. Ako točka P opisuje elipsu čiji su fokusi F_1 i F_2, koju krivulju opisuje težište trokuta F_1F_2P?

4. Ako su duljine stranica trokuta tri uzastopna člana aritmetičkog niza, dokaži da su tada kotangensi polovičnih kutova tog trokuta također uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza.

5. Stanovnici nekog grada igrali su igru *Šalji dalje.* Na samom početku je jedan građanin poslao po jedno pismo sedmorici svojih sugrađana. Zatim su neki od građana koji su dobili pismo odustali od igre, a neki su poslali po jedno pismo sedmorici sugrađana koji još nisu sudjelovali u igri. Taj proces se ponavljao više puta i to tako da je svaki građanin koji je dobio pismo ili odustao od igre ili poslao pisma sedmorici novih ljudi. Nakon nekog vremena igra je prestala jer više nitko u gradu nije slao pisma. Dokaži da broj građana koji su odustali od igre ne može biti jednak 2006.

Općinsko natjecanje 2006., IV. razred, A varijanta – rješenja zadataka

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{i} \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

Rješenje.

Dane uvjete možemo zapisati: $3\,|z-12| = 5\,|z-8i|$ i $|z-4| = |z-8|$, (2 boda)

odnosno uz $z = x + iy$:

$$9\left((x-12)^2 + y^2\right) = 25\left(x^2 + (y-8)^2\right),$$

$$(x-4)^2 + y^2 = (x-8)^2 + y^2.$$

(5 bodova)

Riješimo taj sustav.

Najprije zaključujemo $x - 4 = \pm(x-8)$, a jedina je mogućnost $x = 6$.

(4 boda)

Sada iz prve jednadžbe dobivamo $9\left(36 + y^2\right) = 25\left(36 + (y-8)^2\right)$,

odnosno nakon sređivanja: $y^2 - 25y + 136 = 0$.

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $y_1 = 17$ i $y_2 = 8$. (7 bodova)

Traženi kompleksni brojevi su $z_1 = 6 + 17i$ i $z_2 = 6 + 8i$. (2 boda)

2. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

Rješenje.

Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.

Baza indukcije, tj. nejednakost za $n = 1$, je naprosto $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$.

(5 bodova)

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$. Vrijedi

$$\frac{1}{(n+1)+1} + \cdots + \frac{1}{3(n+1)+1} =$$
$$= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}\right) + \left(\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1}\right)$$

(8 bodova)

pa je za završetak koraka indukcije dovoljno pokazati da vrijedi

$$\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+4} \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{3n+3},$$

tj.

$$\frac{6n+6}{(3n+2)(3n+4)} \geq \frac{2}{3n+3},$$

što nakon množenja postaje

$$18n^2 + 36n + 18 \geq 18n^2 + 36n + 16,$$

a to očigledno vrijedi. (7 bodova)

Alternativno rješenje.
Na $2n+1$ razlomaka iz zadatka primijenimo aritmetičko-harmonijsku nejednakost:

$$\frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}}{2n+1} > \frac{2n+1}{(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n+1)}.$$

Nejednakost je stroga jer brojevi $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{3n+1}$ nisu svi međusobno jednaki.

(15 bodova)

Zbroj u nazivniku ćemo izračunati korištenjem formule za zbroj uzastopnih članova aritmetičkog niza. Dakle vrijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} &> \frac{(2n+1)^2}{(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n+1)} \\
&= \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)\cdot\frac{4n+2}{2}} = 1.
\end{aligned}$$

(5 bodova)

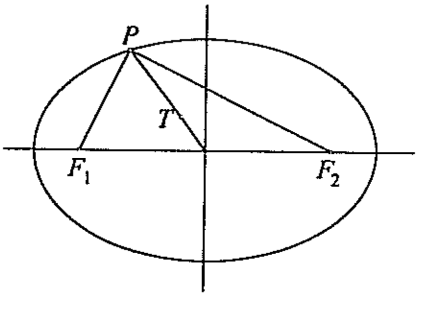
Napomena.
Zadatak se može riješiti i grupiranjem po dva člana (prvi i zadnji, drugi i predzadnji,..., a srednji ostaje sam), koristeći

$$\frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{3n+1-k} = \frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n-k)^2} > \frac{2}{2n+1}.$$

3. Ako točka P opisuje elipsu čiji su fokusi F_1 i F_2, koju krivulju opisuje težište trokuta F_1F_2P?

Rješenje.
Pretpostavimo da elipsa u koordinatnom sustavu ima jednadžbu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (za neke $a, b > 0$), a fokusi imaju koordinate $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$.

(5 bodova)



Neka je $P(x_P, y_P)$ bilo koja točka na elipsi, tj.

$$\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} = 1.$$

Težište trokuta F_1F_2P ima koordinate $T\left(\frac{x_P+(-e)+e}{3}, \frac{y_P+0+0}{3}\right)$, tj. $T(\frac{x_P}{3}, \frac{y_P}{3})$.

(5 bodova)

Iz zapisa

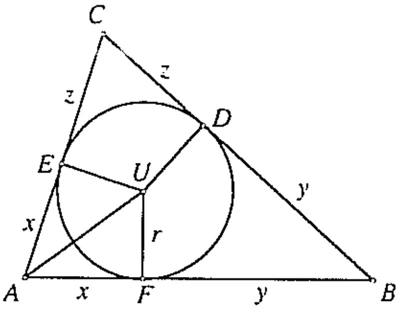
$$\frac{\left(\frac{x_P}{3}\right)^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} + \frac{\left(\frac{y_P}{3}\right)^2}{\left(\frac{b}{3}\right)^2} = 1$$

možemo pročitati da točka T opisuje elipsu sa središtem u ishodištu te poluosima u smjeru koordinatnih osi, duljina $\frac{a}{3}$ i $\frac{b}{3}$. (Drugim riječima, T opisuje elipsu koja se dobiva iz polazne elipse homotetijom sa središtem u ishodištu i koeficijentom $\frac{1}{3}$.)

(10 bodova)

4. Ako su duljine stranica trokuta tri uzastopna člana aritmetičkog niza, dokaži da su tada kotangensi polovičnih kutova tog trokuta također uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza.

Rješenje.
Označimo standardno duljine stranica i kutove trokuta te neka je s njegov poluopseg i r polumjer njemu upisane kružnice. Nadalje, neka su D, E i F njena dirališta sa stranicama trokuta (kao na slici) te stavimo $x = |AE| = |AF|$, $y = |BD| = |BF|$, $z = |CD| = |CE|$.



Rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} y + z &= a \\ z + x &= b \\ x + y &= c \end{aligned}$$

dobivamo

$$x = \frac{b+c-a}{2} = s-a, \quad y = \frac{c+a-b}{2} = s-b, \quad z = \frac{a+b-c}{2} = s-c.$$

(5 bodova)

Bez smanjenja općenitosti prepostavimo da je $a + c = 2b$. Dokazat ćemo da tada vrijedi $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = 2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

Iz trokuta AFU možemo očitati formulu

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{r}=\frac{s-a}{r},$$

a analogno se izvode formule

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{s-b}{r},\quad \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{s-c}{r}.$$

(10 bodova)

Sada računamo:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}-2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{(s-a)+(s-c)-2(s-b)}{r}=\frac{2b-a-c}{r}=0.$$

(5 bodova)

5. Stanovnici nekog grada igrali su igru *Šalji dalje*. Na samom početku je jedan građanin poslao po jedno pismo sedmorici svojih sugrađana. Zatim su neki od građana koji su dobili pismo odustali od igre, a neki su poslali po jedno pismo sedmorici sugrađana koji još nisu sudjelovali u igri. Taj proces se ponavljao više puta i to tako da je svaki građanin koji je dobio pismo ili odustao od igre ili poslao pisma sedmorici novih ljudi. Nakon nekog vremena igra je prestala jer više nitko u gradu nije slao pisma. Dokaži da broj građana koji su odustali od igre ne može biti jednak 2006.

Rješenje.
Primijetimo da se pri svakoj "pošiljci" broj građana koji su primili pismo, ali (još) nisu poslali pisma povećava za 6. (Naime, umanjuje se za jednog pošiljatelja i povećava za sedmoricu primatelja.)

(10 bodova)

Zato je u svakom trenutku broj takvih građana oblika $6k+1$ za k prirodan. (Na početku je taj broj jednak 1, a može se povećati samo za višekratnik od 6.) Nakon završetka igre to je upravo broj građana koji su odustali od igre, a s druge strane, broj 2006 nije oblika $6k+1$.

(10 bodova)