MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, općinsko-gradsko natjecanje
Zadaci za III. razred srednje škole, A varijanta
13. veljače 2006.

1. Odredi sve x, y za koje vrijedi

$$7(\log_y x + \log_x y) = 50,$$
$$xy = 256.$$

2. a) Riješi jednadžbu
$$1 + \sin 2x - \sin x - \cos x = 0.$$

b) Za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba
$$1 + \sin 2x - \sin x - \cos x = a$$
ima realna rješenja ?

3. Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC odabrana je bilo koja točka D, a na stranici $\overline{AB}$ točka E, tako da je DE paralelno s CA. Neka su P, P_1 i P_2 redom površine trokuta ABC, EBD i ABD, dokaži da je tada $P_2 = \sqrt{PP_1}$.

4. Ako za kutove trokuta α i β vrijedi relacija
$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos^3\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$
dokaži da je $\alpha = \beta$.

5. U zadanu polukuglu polumjera R upisane su tri kugle jednakih polumjera koje se međusobno dodiruju i koje diraju zadanu polukuglu. Izračunaj polumjer upisanih kugli.

Općinsko natjecanje 2006., III. razred, A varijanta – rješenja zadataka
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Odredi sve x, y za koje vrijedi

$$7(\log_y x + \log_x y) = 50,$$
$$xy = 256.$$

Rješenje.
Da bi $\log_y x$ i $\log_x y$ bili definirani mora biti $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$ i $y \neq 1$.
Označimo $z = \log_y x$. Pritom je $z \neq 0$ jer je $x \neq 1$.
Iz

$$\log_y x \cdot \log_x y = 1 \qquad \text{(5 bodova)}$$

slijedi da je $\frac{1}{z} = \log_x y$.
Tako prva jednadžba sustava postaje

$$7\left(z + \frac{1}{z}\right) = 50. \qquad \text{(3 boda)}$$

čija su rješenja

$$z_1 = \frac{1}{7} \quad \text{i} \quad z_2 = 7. \qquad \text{(2 boda)}$$

U prvom slučaju dobivamo sustav jednadžbi

$$y = x^7$$
$$xy = 256. \qquad \text{(3 boda)}$$

a u drugom slučaju sustav jednadžbi

$$x = y^7$$
$$xy = 256. \qquad \text{(3 boda)}$$

Rješenja su:

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 128. \qquad \text{(2 boda)}$$
$$x_2 = 128, \quad y_2 = 2. \qquad \text{(2 boda)}$$

2. a) Riješi jednadžbu

$$1 + \sin 2x - \sin x - \cos x = 0.$$

b) Za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba

$$1 + \sin 2x - \sin x - \cos x = a$$

ima realna rješenja ?

Rješenje.

a) Polaznu jednadžbu transformiramo na sljedeći način:

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x - (\sin x + \cos x) = 0$$

$$(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x) = 0,$$

Uz oznaku $t = \sin x + \cos x$, kvadratna jednadžba $t^2 - t = 0$ ima dva rješenja: $t_1 = 0$ i $t_2 = 1$.

(2 boda)

Osim toga je

$$\begin{aligned} t = \sin x + \cos x &= \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ &= 2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \\ &= \sqrt{2}\cdot\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

(2 boda)

Imamo dvije mogućnosti:

1)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\cdot\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ x - \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(3 boda)

2)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\cdot\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 1 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x - \frac{\pi}{4} &= \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{ili} \qquad x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(3 boda)

Napomena: U slučaju ispuštanja neke familije rješenja umjesto 3 boda dati 1 bod. (To važi i za prvi slučaj, npr. za rješenje $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.)

b) Uz oznaku $t = \sin x + \cos x$ dobivamo

$$t^2 - t - a = 0.$$

Kvadratna jednadžba ima realna rješenja kada je diskriminanta $D = 1 + 4a \geq 0$, tj. za $a \geq -\frac{1}{4}$.

(2 boda)

Tada je:

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} = \sqrt{2}\cdot\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

odnosno

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2\sqrt{2}}.$$

Da jednadžba ima realna rješenja mora biti

$$-1 \leq \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2\sqrt{2}} \leq 1 \qquad \text{(3 boda)}$$

$$-2\sqrt{2} \leq 1 \pm \sqrt{1+4a} \leq 2\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2} \leq 1 - \sqrt{1+4a} \leq 1 + \sqrt{1+4a} \leq 2\sqrt{2}$$

odnosno, moraju biti zadovoljene sljedeće dvije nejednadžbe:

$$-2\sqrt{2} \leq 1 - \sqrt{1+4a}$$

$$1 + \sqrt{1+4a} \leq 2\sqrt{2}$$

Prva nejednadžba zadovoljena je za $a \leq 2 + \sqrt{2}$, a druga za $a \leq 2 - \sqrt{2}$.

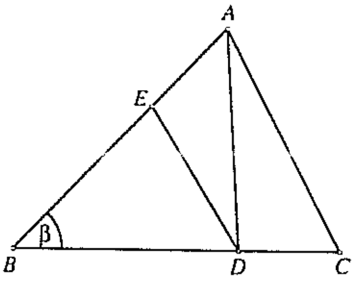
Odatle slijedi $a \leq 2 - \sqrt{2}$. (3 boda)

Konačno, realna rješenja imamo za $a \in \left[-\frac{1}{4}, 2 - \sqrt{2}\right]$. (2 boda)

3. Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC odabrana je bilo koja točka D, a na stranici $\overline{AB}$ točka E, tako da je DE paralelno s CA. Neka su P, P_1 i P_2 redom površine trokuta ABC, EBD i ABD, dokažite da je tada $P_2 = \sqrt{PP_1}$.

Rješenje.

Zbog sličnosti trokuta BDE i BCA vrijedi $|BD| = k|BC|$ i $|BE| = k|BA|$, $k \in (0,1)$. (2 boda)



Neka je β kut pri vrhu B.

Za površine promatranih trokuta vrijedi

$$P = \frac{1}{2}|BA| \cdot |BC| \sin\beta, \qquad \text{(2 boda)}$$

$$P_1 = \frac{1}{2}|BE| \cdot |BD| \sin\beta, \qquad \text{(2 boda)}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}|BA| \cdot |BD| \sin\beta. \qquad \text{(2 boda)}$$

Odavde je

$$PP_1 = \frac{1}{4}\sin^2\beta \cdot |BA| \cdot |BC| \cdot |BE| \cdot |BD| \qquad \text{(5 bodova)}$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2\beta \cdot |BA| \cdot |BC| \cdot k|BA| \cdot k|BC|$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin\beta \cdot |BA| \cdot k|BC|\right)^2 = P_2^2,$$

pa slijedi $P_2 = \sqrt{PP_1}$. (7 bodova)

4. Ako za kutove trokuta α i β vrijedi relacija

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos^3\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

dokaži da je $\alpha=\beta$.

Rješenje.

S obzirom da su α i β kutovi trokuta, slijedi da su kutovi $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$ između 0° i 90°.

(2 boda)

Na tom intervalu funkcija sin raste, a funkcija cos pada.

(3 boda)

Zato $\alpha<\beta$ povlači

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)<\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\quad \text{i} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)>\cos\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

a onda i

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)<\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\quad \text{i} \quad \cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right)>\cos^3\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

pa je

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^3\left(\frac{\beta}{2}\right)<\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

S druge strane, $\alpha>\beta$ povlači

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)>\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\quad \text{i} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)<\cos\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

a onda i

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)>\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\quad \text{i} \quad \cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right)<\cos^3\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

pa je

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^3\left(\frac{\beta}{2}\right)>\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

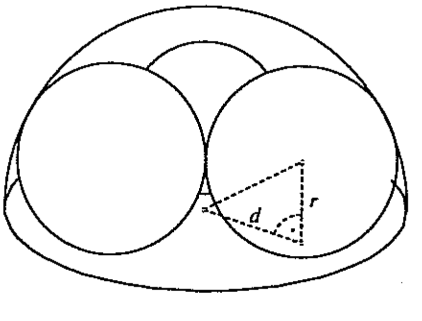
(10 bodova)

Zato je jednakost u zadatku moguća samo za $\alpha=\beta$. (5 bodova)

5. U zadanu polukuglu polumjera R upisane su tri kugle jednakih polumjera koje se međusobno dodiruju i koje diraju zadanu polukuglu. Izračunaj polumjer upisanih kugli.

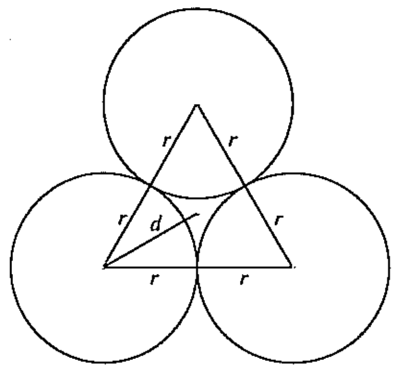
Rješenje.

Označimo s R polumjer polukugle, s r polumjer malih kugli, te s d udaljenost središta polukugle od dirališta male kugle s ravnom stranom polukugle.



Trebamo odrediti vezu između polumjera R i r. Uočimo da su središte polukugle, središte jedne manje kugle i pripadno dirailište vrhovi pravokutnog trokuta s katetama r, d i hipotenuzom $R-r$.

(5 bodova)



Vidimo da tri dirališta malih kugli s ravnom plohom čine trokut sukladan trokutu kojeg tvore središta tih kružnica, a to je jednakostranični trokut stranice $2r$. Zato je

$$d=\frac{2}{3}\cdot\frac{(2r)\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

(5 bodova)

Zato iz

$$R-r=\sqrt{r^2+d^2}$$

uvrštavanjem dobivenog izraza za d dobivamo redom

$$R-r=\sqrt{r^2+\frac{4}{3}r^2},$$

$$R=r\left(1+\sqrt{\frac{7}{3}}\right),$$

$$r=\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\frac{R\left(\sqrt{21}-3\right)}{4}.$$

(10 bodova)