MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, općinsko-gradsko natjecanje

Zadaci za I. razred srednje škole, A varijanta

13. veljače 2006.

1. Koja se znamenka nalazi na 2006. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{469}{1998}$?

2. Tri očeva koraka duga su kao pet sinovih, ali dok otac učini 6 koraka njegov sin učini 7 koraka. Sin je već napravio 30 koraka kada otac krene za njim. Nakon koliko će koraka otac sustići sina?

3. Ako su a, b i c realni brojevi za koje je $a+b \neq 0$, $b+c \neq 0$ i $a+c \neq 0$, dokaži da izraz:

$$\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\left(1+\frac{a}{b+c}\right)\left(1+\frac{b}{a+c}\right)-\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

ne ovisi o vrijednostima brojeva a, b i c.

4. Dokaži da iz jednakosti

$$a^3+b^3+c^3=a^2+b^2+c^2=a+b+c=1$$

slijedi $abc=0$.

5. Nad stranicama kvadrata duljine 1, prema van su konstruirani jednakokračni trapezi tako da su vrhovi svih trapeza ujedno vrhovi pravilnog dvanaesterokuta. Koliki je opseg tog dvanaesterokuta?

Općinsko natjecanje 2006., I. razred, A varijanta – rješenja zadataka

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Koja se znamenka nalazi na 2006. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{469}{1998}$?

Rješenje.

$$\frac{469}{1998} = 469 : 1998 = 0.2347347\ldots \qquad (8 \text{ bodova})$$

Napomena. Upotreba kalkulatora nije dozvoljena!

Uočavamo da se (nakon znamenke 2 na prvom decimalnom mjestu) ponavlja period od tri znamenke 347. (2 boda)

On se ponavlja 668 puta, jer je

$$2005 = 668 \cdot 3 + 1. \qquad (5 \text{ bodova})$$

Na 2006. mjestu nalazi se prva znamenka perioda, broj 3. (5 bodova)

2. Tri očeva koraka duga su kao pet sinovih, ali dok otac učini 6 koraka njegov sin učini 7 koraka. Sin je već napravio 30 koraka kada otac krene za njim. Nakon koliko će koraka otac sustići sina?

Rješenje.
Neka otac učini x koraka do susreta sa sinom.

Tada njegov sin za isto vrijeme učini $\frac{7}{6}x$ koraka. (3 boda)

To znači da je sin učinio ukupno $30 + \frac{7}{6}x$ koraka. (2 boda)

Duljina koraka sina je $\frac{3}{5}$ duljine očevog koraka (3 boda)

pa je:

$$\frac{3}{5}\left(30 + \frac{7}{6}x\right) = x. \qquad (*)$$

(7 bodova)

Dakle, otac će sustići sina nakon $x = 60$ koraka. (5 bodova)

Napomena. Ako učenik dobije jednadžbu $(*)$ na bilo koji način, za to treba dobiti ukupno 15 bodova, a za njeno točno rješenje još 5 bodova.

3. Ako su a, b i c realni brojevi za koje je $a + b \neq 0$, $b + c \neq 0$ i $a + c \neq 0$, dokaži da izraz:

$$\left(1 + \frac{c}{a+b}\right)\left(1 + \frac{a}{b+c}\right)\left(1 + \frac{b}{a+c}\right) - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

ne ovisi o vrijednostima brojeva a, b i c.

Rješenje. Dani izraz redom je jednak

$$\frac{a+b+c}{a+b}\cdot\frac{a+b+c}{b+c}\cdot\frac{a+b+c}{a+c}-\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(a+c)}=$$

$$=\frac{(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b)(b+c)(a+c)} \qquad \text{(5 bodova)}$$

$$=\frac{\left[(a+b+c)^3-a^3\right]-\left(b^3+c^3\right)}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$$=\frac{(b+c)\left[(a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2\right]-(b+c)\left(b^2-bc+c^2\right)}{(a+b)(b+c)(a+c)} \qquad \text{(5 bodova)}$$

$$=\frac{(b+c)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac+a^2+ab+ac+a^2-b^2+bc-c^2\right)}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$$=\frac{3\left(a^2+ab+bc+ac\right)}{(a+b)(a+c)}=\frac{3(a(a+b)+c(a+b))}{(a+b)(a+c)}=\frac{3(a+b)(a+c)}{(a+b)(a+c)}=3$$

Promatrani izraz očito ne ovisi o a, b i c. (10 bodova)

4. Dokaži da iz jednakosti

$$a^3+b^3+c^3=a^2+b^2+c^2=a+b+c=1$$

slijedi $abc=0$.

Rješenje.
Iz jednakosti $a+b+c=1$ kvadriranjem dobivamo:

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=1.$$

Kako je $a^2+b^2+c^2=1$, slijedi $2ab+2bc+2ac=0$, odnosno

$$ab+bc+ac=0. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Množenjem jednakosti $a^2+b^2+c^2=1$ i $a+b+c=1$ dobivamo:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)=1,$$

$$a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2=1.$$

Kako je $a^3+b^3+c^3=1$ slijedi

$$a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2=0. \qquad \text{(7 bodova)}$$

Množenjem jednakosti $ab+bc+ac=0$ i jednakosti $a+b+c=1$ dobivamo:

$$(ab+bc+ac)(a+b+c)=0,$$

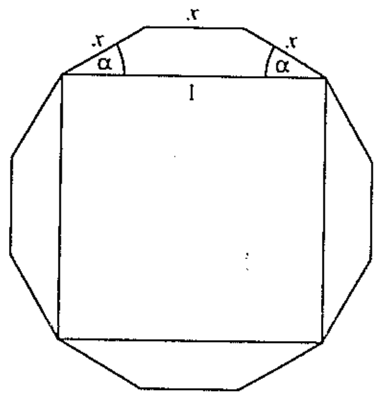
$$3abc+a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2=0.$$

Kako vrijedi $a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2=0$, slijedi $3abc=0$, odnosno

$$abc=0. \qquad \text{(8 bodova)}$$

5. Nad stranicama kvadrata duljine 1, prema van su konstruirani jednakokračni trapezi tako da su vrhovi svih trapeza ujedno vrhovi pravilnog dvanaesterokuta. Koliki je opseg tog dvanaesterokuta?

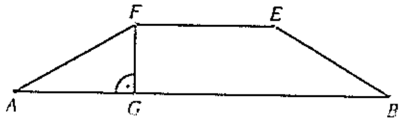
Rješenje.
Unutarnji kut pravilnog dvanaesterokuta je 150°, (2 boda)



pa vrijedi

$$2\alpha + 90^\circ = 150^\circ, \ \alpha = 30^\circ. \qquad \text{(3 boda)}$$

Izdvojimo jedan trapez:



Ako su duljine $|AF| = |FE| = |EB| = x$ i $|AB| = 1$, tada je

$$|AG| = \frac{1-x}{2}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Trokut AGF je pola jednakostraničnog trokuta stranice duljine x,
pa njegova visina $|AG|$ iznosi $\frac{x\sqrt{3}}{2}$. (3 boda)
Zato je

$$\frac{1-x}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{(4 boda)}$$

odnosno $x\left(1+\sqrt{3}\right) = 1$, te konačno

$$x = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Zato je opseg dvanaesterokuta $O = 12x = 6(\sqrt{3}-1)$. (2 boda)

Napomena. Dijelovi ovog zadatka mogu se riješiti na različite načine. U svakom slučaju, određivanje kuta između stranice kvadrata i dvanaesterokuta boduje se s 5 bodova, postavljanje jednadžbe čije je rješenje stranica dvanaesterokuta s 10 bodova, a rješenje te jednadžbe i konačan rezultat s još 5 bodova.