MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, općinsko-gradsko natjecanje

Zadaci za **II. razred** srednje škole, **A varijanta**

13. veljače 2006.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi:
$$\operatorname{Re} z = 5 \cdot \operatorname{Im} z \qquad \text{i} \qquad |z-(a+ib)| = 5,$$
gdje su a i b ($a > b$) rješenja kvadratne jednadžbe
$$(x-1)^2 + 3(x-1) - 4 = 0.$$

2. U drugim razredima neke škole ima između 100 i 300 učenika. Za vrijeme jedne priredbe ravnatelj ih je namjeravao postaviti u redove. Ako bi ih stavio u 8 redova, jedan bi učenik bio viška. Ako bi ih stavio u 7 redova, dva bi učenika bila viška. Ako bi ih stavio u 6 redova, preostalo bi 5 učenika. Koliko ima ukupno učenika u drugim razredima te škole?

3. Ako je
$$ax^3 = by^3 = cz^3 \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,$$
pokaži da je
$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

4. U ovisnosti o pozitivnom realnom parametru p riješi nejednadžbu
$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2.$$

5. Stranica $\overline{BC}$ trokuta ABC dira njegovu upisanu kružnicu u točki D, a tom trokutu pripisana kružnica uz stranicu $\overline{BC}$ dira tu stranicu u točki E. Dokaži da su točke D i E simetrične u odnosu na polovište stranice $\overline{BC}$.

   (Trokutu pripisana kružnica je kružnica koja dodiruje jednu stranicu trokuta i produžetke drugih dviju stranica.)

Općinsko natjecanje 2006., II. razred, A varijanta – rješenja zadataka
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi:

$$\operatorname{Re} z = 5 \cdot \operatorname{Im} z \quad \text{i} \quad |z - (a + ib)| = 5,$$

gdje su a i b ($a > b$) rješenja kvadratne jednadžbe

$$(x-1)^2 + 3(x-1) - 4 = 0.$$

Rješenje.
Jednadžba je već napisana kao kvadratna jednadžba po $(x-1)$.
Dobiva se $(x-1)_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2}$, tj. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. (5 bodova)

Napomena: Sređivanjem se dobiva jednadžba $x^2 + x - 6 = 0$ koja se također lagano rješava.

Tražimo kompleksan broj $z = x + iy$.
Iz prvog uvjeta je $x = 5y$.
Drugi uvjet može se zapisati u obliku $|x + yi - 2 + 3i| = 5$.
(5 bodova)

Odavde redom dobivamo:

$$|5y + yi - 2 + 3i| = 5,$$
$$(5y-2)^2 + (y+3)^2 = 25,$$
$$13y^2 - 7y - 6 = 0.$$
(5 bodova)

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $y_1 = 1$ i $y_2 = -\dfrac{6}{13}$.
Zatim dobivamo $x_1 = 5$ i $x_2 = -\dfrac{30}{13}$.
Time smo dobili dva kompleksna broja $z_1 = 5 + i$ i $z_2 = -\dfrac{30}{13} - \dfrac{6}{13}i$. (5 bodova)

2. U drugim razredima neke škole ima između 100 i 300 učenika. Za vrijeme jedne priredbe ravnatelj ih je namjeravao postaviti u redove. Ako bi ih stavio u 8 redova, jedan bi učenik bio viška. Ako bi ih stavio u 7 redova, dva bi učenika bila viška. Ako bi ih stavio u 6 redova, preostalo bi 5 učenika. Koliko ima ukupno učenika u drugim razredima te škole?

Prvo rješenje.
Označimo li broj učenika s x tada postoje prirodni brojevi k, l i m takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} x &= 8k + 1, \\ x &= 7l + 2, \\ x &= 6m + 5. \end{aligned}$$

(4 boda)

Iz prva dva uvjeta dobivamo:

$$8k = 7l + 1 \Rightarrow 8(k-1) = 7(l-1) \Rightarrow k = 7a + 1 \text{ i } l = 8a + 1,\ a \in \mathbb{N}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Iz druga dva uvjeta imamo:

$$7l = 6m + 3 \Rightarrow 7(l-3) = 6(m-3) \Rightarrow l = 6b + 3 \text{ i } m = 7b + 3,\ b \in \mathbb{N}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Odavde dobivamo

$$\begin{aligned} 8a + 1 &= 6b + 3, \\ 8a &= 6b + 2 \quad / : 2 \\ 4(a-1) &= 3(b-1). \end{aligned}$$

Zato postoji pozitivan cijeli broj p takav da je $a - 1 = 3p$, tj. $a = 3p + 1$. (4 boda)

Slijedi,

$$x = 8k + 1 = 8 \cdot [7a + 1] + 1 = 8 \cdot [7 \cdot (3p + 1) + 1] + 1 = 168p + 65. \qquad \text{(2 boda)}$$

Uvjet $100 < x < 300$ zadovoljava jedino $p = 1$, odnosno, $x = 233$. (2 boda)

Drugo rješenje.
Budući da je $x = 8k + 1$, mogući su ovi brojevi:

$$\begin{aligned} x \;=\; & 105, 113, 121, 129, 137, 145, 153, 161, 169, 177, 185, 193, 201, \\ & 209, 217, 225, 233, 241, 249, 257, 265, 273, 281, 289, 297. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Od ovih brojeva uvjet $x = 7l + 2$ zadovoljavaju

$$x = 121, 177, 233, 289. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Od ovih brojeva uvjet $x = 6m + 5$ zadovoljava samo

$$x = 233.$$

Dakle, u drugim razredima ima ukupno 233 učenika. (5 bodova)

3. Ako je

$$ax^3 = by^3 = cz^3 \quad \text{i} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,$$

pokaži da je

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Rješenje.
Uvjeti zadatka su:

$$ax^3 = by^3 = cz^3, \qquad (*)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1. \qquad (**)$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}} \\ &\overset{(*)}{=} \sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \overset{(**)}{=} \sqrt[3]{ax^3} = x\sqrt[3]{a}. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Zbog (*) je i $A = y\sqrt[3]{b} = z\sqrt[3]{c}$, pa je

$$\sqrt[3]{a} = \frac{A}{x}, \quad \sqrt[3]{b} = \frac{A}{y}, \quad \sqrt[3]{c} = \frac{A}{z}, \qquad \text{(5 bodova)}$$

odakle je

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} = A\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \overset{(**)}{=} A = \sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2},$$

tj.

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}. \qquad \text{(5 bodova)}$$

. U ovisnosti o pozitivnom realnom parametru p riješi nejednadžbu

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2.$$

Rješenje.

Da bi operacije bile definirane, mora biti $x \neq 0$. Sada treba promatrati dva slučaja: 1° $x > 0$ i 2° $x < 0$. Nejednadžbu napišimo u obliku

$$\frac{x^2-2p^2}{px} < 2. \qquad (*)$$

1° $x > 0$. Iz $(*)$ sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} x^2 - 2p^2 &< 2px, \\ (x-p)^2 &< 3p^2, \\ |x-p| &< p\sqrt{3}, \end{aligned}$$

tj. $x \in \langle p - p\sqrt{3}, p + p\sqrt{3}\rangle$.

Zbog $x > 0$ zadovoljava samo $x \in \langle 0, p(1+\sqrt{3})\rangle$. (9 bodova)

2° $x < 0$. Sada iz $(*)$ imamo

$$\begin{aligned} x^2 - 2p^2 &> 2px, \\ (x-p)^2 &> 3p^2, \\ |x-p| &> p\sqrt{3}, \\ -x+p &> p\sqrt{3}, \\ x &< p(1-\sqrt{3}), \end{aligned}$$

tj. $x \in \langle -\infty, (1-\sqrt{3})p\rangle$. (9 bodova)

Dakle, zadovoljava unija ova dva skupa, tj.

$$x \in \langle -\infty, (1-\sqrt{3})p\rangle \cup \langle 0, (1+\sqrt{3})p\rangle. \qquad \text{(2 boda)}$$

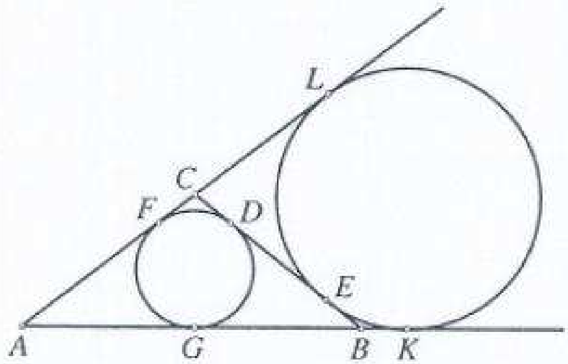
5. Stranica $\overline{BC}$ trokuta ABC dira njegovu upisanu kružnicu u točki D, a tom trokutu pripisana kružnica uz stranicu $\overline{BC}$ dira tu stranicu u točki E. Dokaži da su točke D i E simetrične u odnosu na polovište stranice $\overline{BC}$.

(Trokutu pripisana kružnica je kružnica koja dodiruje jednu stranicu trokuta i produžetke drugih dviju stranica.)

Rješenje.

Uz oznake na slici dovoljno je pokazati da je $|CD| = |BE|$. (3 boda)

Koristimo poznatu činjenicu: Ako se iz neke točke izvan kružnice povuku tangente na kružnicu, tada su udaljenosti te točke od dirališta tih tangenata međusobno jednake. (2 boda)



Vrijedi $|AK| = |AL|$, $|AF| = |AG|$, odakle je $|AK| - |AG| = |AL| - |AF|$, tj. $|GK| = |FL|$. (5 bodova)

Sada redom imamo:

$$\begin{aligned}
|GB| + |BK| &= |FC| + |CL| \\
|BD| + |BE| &= |CD| + |CE| \\
|BE| + |ED| + |BE| &= |CD| + |CD| + |DE| \\
|BE| &= |CD|.
\end{aligned}$$

(10 bodova)