Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^2 + 11^2 = y^2.$$

Zadatak 2. U krugu sa središtem u točki S, polumjera $r = 2$ cm, povučena su dva polumjera $\overline{SA}$ i $\overline{SB}$. Kut između njih je 45°. Neka je K sjecište pravca AB i okomice povučene na pravac AS u točki S, a točka L je nožište visine trokuta ABS povučene iz vrha B. Izračunajte površinu trapeza $SKBL$.

Zadatak 3. Odredite x, y, z ako je

$$\frac{ay + bx}{xy} = \frac{bz + cy}{yz} = \frac{cx + az}{zx} = \frac{4a^2 + 4b^2 + 4c^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad a, b, c \in \mathbf{R}$$

Zadatak 4. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a > b$ i $ab = 1$. Dokažite da tada vrijedi nejednakost $\dfrac{a - b}{a^2 + b^2} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Ako vrijedi jednakost, koliko je $a + b$?

Zadatak 5. Duljine stranica pravokutnika odnose se kao $12 : 5$. Dijagonale pravokutnika dijele pravokutnik na četiri trokuta. Dvama od tih trokuta, koji imaju zajedničku stranicu, upisane su kružnice polumjera r_1 i r_2. Izračunajte omjer $r_1 : r_2$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Odredite najmanju i najveću vrijednost izraza $\left|z-\frac{1}{z}\right|$, ako je z kompleksni broj takav da je $|z|=2$.

Zadatak 2. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^3+11^3=y^3.$$

Zadatak 3. Pravac p_1 presijeca graf kvadratne funkcije $y=ax^2+bx+c$ u točkama A i B. Pravac p_2 paralelan je pravcu p_1 i presijeca taj isti graf u točkama C i D. Dokažite da je suma apscisa točaka A i B jednaka sumi apscisa točaka C i D.

Zadatak 4. U paralelogramu $ABCD$ točke P, Q, R, S polovišta su stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ (tim redom). Pravci AR, BS, CP, DQ sijeku se i formiraju četverokut.

a) Dokažite da je taj četverokut paralelogram.

b) Nađite omjer površina tog paralelograma i početnog paralelograma.

Zadatak 5. Dokažite da je za svaku četvorku prirodnih brojeva a, b, c, d broj

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

djeljiv s 12.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Izračunajte:

$$\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}-\underbrace{66\ldots6}_{n \text{ znamenaka}}}\,.$$

Zadatak 2. Za koje cijele brojeve n funkcija $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{5}{n}x$ ima period 3π?

Zadatak 3. Riješite jednadžbu:

$$x^2 + 10x \cdot \sin(xy) + 25 = 0.$$

Zadatak 4. Dokažite da u trokutu ABC s duljinama stranica a, b, c, kutovima α, β, γ i poluopsegom s vrijedi jednakost

$$s^2 = b^2\cos^2\frac{\gamma}{2} + c^2\cos^2\frac{\beta}{2} + 2bc\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Zadatak 5. Osnovica piramide $ABCV$ je pravokutan trokut ABC s hipotenuzom $|AB| = c$ i kutom $\sphericalangle A = \alpha$. Pobočni bridovi jednako su nagnuti prema ravnini osnovice, a ravnina BCV zatvara s ravninom ABC kut β. Odredite volumen piramide.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Odredite, ako postoje, najmanji i najveći prirodni broj kojem je umnožak znamenaka 18 900.

Zadatak 2. Nađite međusobne omjere realnih brojeva x, y, z ako uz zadane brojeve a, b, c, $abc \neq -1$, vrijede jednakosti

$$x + by = y + cz = z + ax.$$

Zadatak 3. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbe

a) $z^3 = \bar{z}$,

b) $z^5 = \bar{z}$,

Zadatak 4. Zadana je hiperbola sa središtem O. Pravci kroz neku njenu točku paralelni njenim asimptotama sijeku realnu os te hiperbole u točkama U i V tako da je $|OU| < |OV|$. Neka je točka K presjek okomice na realnu os hiperbole u točki U i polukružnice s promjerom $\overline{OV}$. Dokažite da je $|OK| = a$, pri čemu je a duljina realne poluosi dane hiperbole.

Zadatak 5. Zadani su nizovi prirodnih brojeva $a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ i $b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$; $n \in \mathbf{N}$. Dokažite da je, za svaki $n \in \mathbf{N}$, točno jedan od brojeva a_n i b_n djeljiv s 5.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija,
9. ožujka 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Zadana jednakost ekvivalentna je s

$$11^2 = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x).$$

Kako je 11 prost broj, broj $y - x$ poprima jednu od vrijednosti ± 1, ± 11 ili $\pm 11^2$.
(5 bodova)

a) Neka je $y - x = 1$, tada je $x + y = 11^2$. Rješenje ovog sustava je $x = 60$, $y = 61$.

Ako je $y - x = -1$, tada je $x + y = -11^2$. Rješenje ovog sustava je $x = -60$, $y = -61$. **(5 bodova)**

b) Neka je $y - x = 11$, tada je $x + y = 11$. Rješenje ovog sustava je $x = 0$, $y = 11$.

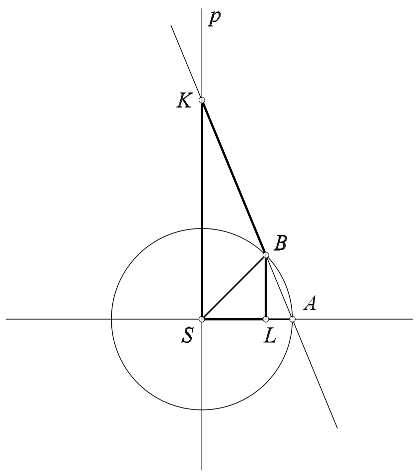
Ako je $y - x = -11$, tada je $x + y = -11$. Rješenje ovog sustava je $x = 0$, $y = -11$.
(5 bodova)

c) Neka je $y - x = 11^2$, tada je $x + y = 1$. Rješenje ovog sustava je $x = -60$, $y = 61$.

Neka je $y - x = -11^2$, tada je $x + y = -1$. Rješenje ovog sustava je $x = 60$, $y = -61$. **(5 bodova)**

Napomena. Ukoliko učenik ne navede neko od rješenja, za svako koje nedostaje treba oduzeti 3 boda.

Zadatak 2. Nacrtajmo sliku:



Trokut SLB je jednakokračan pravokutan i vrijedi $|SL| = |BL| = \sqrt{2}\,\text{cm}$. **(5 bodova)**

Trokut KSA sličan je trokutu BLA te vrijedi

$$\frac{|KS|}{|SA|} = \frac{|BL|}{|LA|} \implies \frac{|KS|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

Odavde dobivamo

$$|KS| = \sqrt{2}(2+\sqrt{2}). \quad \textbf{(10 bodova)}$$

Zato je tražena površina jednaka

$$P_{SKBL} = \frac{|KS|+|BL|}{2} \cdot |SL| = 3+\sqrt{2}. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Zadatak 3. Prve dvije jednakosti možemo napisati ovako:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y} = \frac{b}{y}+\frac{c}{z} = \frac{c}{z}+\frac{a}{x}.$$

Odavde dobivamo:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \implies x = \frac{az}{c}, \quad y = \frac{bz}{c}. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Sad je

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y} = \frac{a}{\frac{az}{c}} + \frac{b}{\frac{bz}{c}} = \frac{2c}{z}.$$

S druge strane, iz zadanih jednadžbi vrijedi

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y} = \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{x^2+y^2+z^2} = \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{\frac{a^2z^2}{c^2}+\frac{b^2z^2}{c^2}+z^2} = \frac{4c^2(a^2+b^2+c^2)}{z^2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{4c^2}{z^2}$$

Odavde sad slijedi

$$\frac{4c^2}{z^2} = \frac{2c}{z} \implies \frac{2c}{z} = 1$$

Tako dobivamo rješenje: $z = 2c$, $x = 2a$, $y = 2b$. **(15 bodova)**

Zadatak 4. 1. način: Imamo redom

$$\frac{a-b}{a^2+b^2} \le \frac{\sqrt{2}}{4} \iff \frac{(a-b)^2}{(a^2+b^2)^2} \le \frac{1}{8}$$
$$\iff (a^2+b^2)^2 \ge 8(a-b)^2 \iff (a^2+b^2)^2 - 8(a^2+b^2-2ab) \ge 0$$
$$\iff (a^2+b^2)^2 - 8(a^2+b^2)+16 \ge 0 \iff (a^2+b^2-4)^2 \ge 0. \quad \textbf{(15 bodova)}$$

Jednakost vrijedi za $a^2+b^2=4$. Ovu jednakost možemo pisati $(a+b)^2-2ab=4$, a odavde nalazimo $a+b=\sqrt{6}$. **(5 bodova)**

2. način: Dana nejednakost ekvivalentna je s $2\sqrt{2}(a-b) \le a^2+b^2$, odnosno zbog $ab=1$,

$$2\sqrt{2}\left(a-\frac{1}{a}\right) \le a^2+\frac{1}{a^2}. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

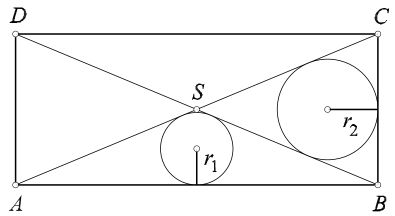
Stavimo $t = a - \frac{1}{a}$. **(5 bodova)**

Tada je $a^2 + \frac{1}{a^2} = t^2 + 2$, a dana nejednakost ekvivalentna s $2\sqrt{2}t \leq t^2 + 2$ odnosno $(t - \sqrt{2})^2 \geq 0$, a to očito vrijedi. **(5 bodova)**

Jednakost je ispunjena kada je $t = \sqrt{2}$, odnosno $a - \frac{1}{a} = \sqrt{2}$.

Rješenja jednadžbe su $a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (ili obratno), pa je $a + b = \sqrt{6}$. **(5 bodova)**

Zadatak 5. Neka se dijagonale pravokutnika sijeku u točki S. Promatrajmo trokute ABS i BCS. Polumjeri kružnica upisanih tim trokutima su r_1 i r_2, kao na slici.



(3 boda)

Ti trokuti imaju jednake ploštine P, jer je ploština svakog jednaka četvrtini ploštine paralelograma. **(2 boda)**

Poluopsege tih trokuta označimo s_1 i s_2. Vrijedi $P = r_1 s_1 = r_2 s_2$, odakle je $r_1 : r_2 = s_2 : s_1$. Ako je d duljina dijagonale pravokutnika, tada je $s_1 = \dfrac{\frac{d}{2} + \frac{d}{2} + a}{2} = \dfrac{d+a}{2}$.
Isto je tako $s_2 = \dfrac{d+b}{2}$. Zato je $r_1 : r_2 = (d+b) : (d+a)$. **(5 bodova)**

Izračunajmo d. Omjer $a : b = 12 : 5$ možemo pisati kao $a = 12k$, $b = 5k$, $k \in \mathbf{R}^+$.

$$d^2 = a^2 + b^2 = (12k)^2 + (5k)^2 = 144k^2 + 25k^2 = 169k^2,$$
$$d = 13k. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Konačno je

$$r_1 : r_2 = (13k + 5k) : (13k + 12k) = (18k) : (25k),$$

to jest

$$r_1 : r_2 = 18 : 25. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija,
9. ožujka 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Neka je $z = a + bi$. Tada je

$$4 = |z|^2 = a^2 + b^2, \text{ tj. } a^2 + b^2 = 4, \qquad \textbf{(3 boda)}$$

pa imamo

$$\begin{aligned}\left|z - \frac{1}{z}\right|^2 &= \left|a + bi - \frac{1}{a+bi}\right|^2 = \left|a + bi - \frac{a-bi}{a^2+b^2}\right|^2 \\ &= \left|a + bi - \frac{a-bi}{4}\right|^2 = \left|\frac{3}{4}a + \frac{5}{4}bi\right|^2 \\ &= \frac{9}{16}a^2 + \frac{25}{16}b^2 = \frac{9}{16}(4-b^2) + \frac{25}{16}b^2 \\ &= \frac{9}{4} + b^2. \quad \textbf{(7 bodova)}\end{aligned}$$

Funkcija $\left|z - \frac{1}{z}\right|^2$ postiže minimum $\frac{9}{4}$ za $b^2 = 0$, pa funkcija $\left|z - \frac{1}{z}\right|$ postiže minimum $\frac{3}{2}$ za $b = 0$, pri čemu je $a^2 = 4$, tj. $a = \pm 2$. **(5 bodova)**
S obzirom da vrijedi $a^2 + b^2 = 4$, maksimalna vrijednost za b^2 je 4. Zato funkcija $\left|z - \frac{1}{z}\right|^2$ postiže maksimum $\frac{9}{4} + 4$ za $b^2 = 4$, pa funkcija $\left|z - \frac{1}{z}\right|$ postiže maksimum $\frac{5}{2}$ za $b = \pm 2$, pri čemu je $a^2 = 0$, tj. $a = 0$. **(5 bodova)**

Napomena. Slično se zaključivanje može izvesti i iz:

$$\left|z - \frac{1}{z}\right|^2 = \frac{9}{16}a^2 + \frac{25}{16}b^2 = \frac{9}{4} + b^2.$$

Zadatak 2. Iz uvjeta najprije zaključujemo da vrijedi $y > x$, pa je $y - x > 0$.
Zadana jednakost ekvivalentna je s

$$11^3 = y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2).$$

Kako je 11 prost broj, broj $y - x$ poprima jednu od vrijednosti 1, 11, 11^2, 11^3. **(5 bodova)**

a) Neka je $y - x = 1$, tada je $11^3 = x^2 + xy + y^2 = 3x^2 + 3x + 1$. Izraz $3x^2 + 3x + 1$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1, dok $11^3 = (9+2)^3$ dijeljenjem s 3 daje ostatak 2. Zaključujemo da u ovom slučaju jednadžba nema rješenja. **(4 boda)**

b) Ako je $y - x = 11$, tada je $y = x + 11$ i vrijedi

$$11^2 = x^2 + xy + y^2 = 3x^2 + 3 \cdot 11x + 11^2.$$

Sada mora biti ili $x = 0$, $y = 11$, ili $x = -11$, $y = 0$. **(3 boda)**

c) Ako je $y - x = 11^2$, tada je $y = x + 11^2$ i vrijedi

$$11 = x^2 + xy + y^2 = 3x^2 + 3 \cdot 11^2 x + 11^4.$$

Lijeva strana dobivene jednakosti djeljiva je s 11, pa zato x mora biti djeljiv s 11. Stavimo li $x = 11z$, dobivamo

$$1 = 3 \cdot 11z^2 + 3 \cdot 11^2 z + 11^3.$$

Desna strana dijeljiva je s 11, a lijeva nije. Zato u ovom slučaju jednadžba nema rješenja. **(4 boda)**

d) Ako je $y - x = 11^3$, tada je $y = x + 11^3$ i vrijedi

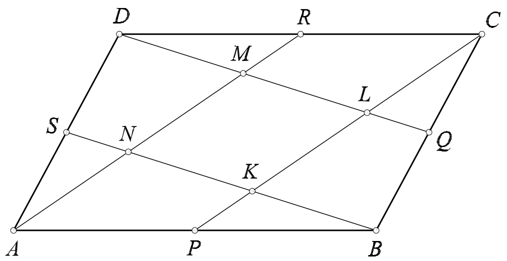
$$1 = x^2 + xy + y^2 = 3x^2 + 3 \cdot 11^3 x + 11^6.$$

Ova jednadžba nema realna rješenja jer je pripadna diskriminanta negativna: $D = 9 \cdot 11^6 - 12(11^6 - 1)$. **(4 boda)**

Zadatak 3. Apscise točaka A i B zadovoljavaju kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = kx + b_1$, a apscise točaka C i D jednadžbu $ax^2 + bx + c = kx + b_2$. **(5 bodova)**

Iz Vièteovih formula rješenja u obje jednadžbe zadovoljavaju isti uvjet: $x_1 + x_2 = \dfrac{k - b}{a}$. **(15 bodova)**

Zadatak 4. Označimo točke kao na slici



(2 boda)

a) Budući je $|AP| = |RC|$ i $AP \parallel RC$, onda je $AR \parallel CP$. Na isti način, iz $|BQ| = |DS|$ i $BQ \parallel DS$ slijedi da je $BS \parallel DQ$. Zato je četverokut $KLMN$ paralelogram. **(5 bodova)**

b) Dužina $\overline{QL}$ je srednjica trokuta BCK, jer je $QL \parallel BK$ i $|BQ| = |QL|$. Zato vrijedi $|KL| = |LC|$.

Iz istog razloga je $|AN| = |NM|$.

Dužina $\overline{PK}$ je srednjica trokuta ABN, pa je $|PK| = \frac{1}{2}|AN| = \frac{1}{2}|NM| = \frac{1}{2}|KL|$.

Dobili smo: $|KL| = |LC| = 2|PK|$ pa je $|KL| = \frac{2}{5}|PC|$. **(3 boda)**

Dalje imamo

$$P_{KLMN} = |KL| \cdot v = \frac{2}{5}|PC| \cdot v = \frac{2}{5} \cdot P_{APCR}$$

(Ovdje je v visina paralelograma $KLMN$ s osnovicom $\overline{KL}$.) **(5 bodova)**

Budući da je trokut ADR sukladan trokutu BCP, jer se podudaraju u tri stranice, onda je

$$P_{APCR} = 2 \cdot P_{ADR} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD}.$$

Tako dobivamo $P_{KLMN} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} = \frac{1}{5} \cdot P_{ABCD}$. **(5 bodova)**

Zadatak 5. Prvo dokažimo da je broj x djeljiv s 3.

Između brojeva a, b, c, d dva daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, pa je razlika ta dva broja djeljiva s 3, a onda je i x djeljiv s 3. **(5 bodova)**

Sad dokažimo da je broj x djeljiv s 4.

Ako između brojeva a, b, c, d dva daju isti ostatak pri dijeljenju s 4, onda, kao u prethodnom slučaju zaključujemo da je x djeljiv s 4.

Ako su svi ostaci brojeva a, b, c, d pri dijeljenju s 4 različiti, onda je razlika brojeva koji daju ostatke 0 i 2 djeljiva s 2, kao i razlika brojeva koji daju ostatke 1 i 3. Tako je i x djeljiv s 4. **(15 bodova)**

Napomena. Zaključak o djeljivosti broja s 4 može se izvesti i promatranjem njihove parnosti. Ako su svi brojevi parni, ili svi neparni, tcrdnja je očevidna jer je svaki faktor djeljiv s 2. Ako su među njima dva parna i dva neparna, tada je razlika brojeva u tim parovima paran broj, pa je umnožak djeljiv s 4. Ako su među njima tri parna i jedan neparan, onda postoje tri razlike koje su paran broj. Isti zaključak vrijedi i ako su tri broja neparna, a jedan paran. **(15 bodova)**

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija, 9. ožujka 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Označimo sa x traženi broj, i neka je $a = \underbrace{11\ldots1}_{n}$. Tada je

$$10^n = \underbrace{99\ldots9}_{n} + 1 = 9a + 1 \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned}
\underbrace{44\ldots4}_{2n} &= 4a\cdot 10^n + 4a = 4a(9a+2),\\
\underbrace{11\ldots1}_{n+1} &= 10a + 1,\\
\underbrace{66\ldots6}_{n} &= 6a. \qquad \textbf{(5 bodova)}
\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}
x^2 &= 4a(9a+2) + 10a + 1 - 6a\\
&= 36a^2 + 12a + 1 = (6a+1)^2
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$x = 6a + 1 = 6\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 = \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7.$$

(10 bodova)

Zadatak 2. Ako je 3π period od f, onda je $f(x+3\pi) = \cos n(x+3\pi)\cdot\sin\frac{5}{n}(x+3\pi) = \cos nx\cdot\sin\frac{5}{n}x = f(x)$ za svaki $x\in\mathbf{R}$. Uzmimo $x=0$ te iz navedene jednakosti dobivamo $\sin\frac{15\pi}{n} = 0$, što je ispunjeno za $n = \pm1, \pm3, \pm5, \pm15$. Neposrednom provjerom zaključujemo kako dana funkcija za svaku od tih vrijednosti broja n ima period 3π. **(20 bodova)**

Napomena. Bilo koje djelomično rješenje treba bodovati najviše s 10 bodova.

Zadatak 3. Zadatak se može riješiti na više načina. Evo nekih rješenja.

1. način. Stavimo, radi jednostavnosti zapisivanja, $a = \sin(xy)$. Jednadžba

$$x^2 + 10ax + 25 = 0$$

ekvivalentna je s

$$x = -5a \pm 5\sqrt{a^2-1}.$$

Zato ona ima realna rješenja samo onda kad je $|a| \geq 1$. S obzirom da je uvijek $|\sin(xy)| \leq 1$, zaključujemo da mora biti **a)** $\sin(xy) = 1$ ili **b)** $\sin(xy) = -1$. **(8 bodova)**

a) Ako je $a = 1$, onda mora biti $x^2 + 10x + 25 = 0$ pa je $x = -5$. Dakle mora biti $\sin(5y) = -1$. **(3 boda)**

b) Ako je $a = -1$, onda mora biti $x^2 - 10x + 25 = 0$ pa je $x = 5$. Dakle mora biti $\sin(5y) = -1$. **(3 boda)**

U oba slučaja je $y = \frac{3\pi}{10} + k \cdot \frac{2\pi}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$. Prema tome skup rješenja glasi

$$S = \left\{ \left(-5, \frac{3\pi}{10} + k \cdot \frac{2\pi}{5}\right), \left(5, \frac{3\pi}{10} + k \cdot \frac{2\pi}{5}\right) \right\}, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad \textbf{(6 bodova)}$$

2. način. Iz zadanog uvjeta je

$$\sin(xy) = -\frac{x^2 + 25}{10x}.$$

Zato mora biti

$$-1 \leq \frac{x^2 + 25}{10x} \leq 1. \quad \textbf{(6 bodova)}$$

Ako je $x > 0$, nejednakost slijeva vrijedi a zdesna dobivamo

$$(x - 5)^2 \leq 0$$

pa mora biti $x = 5$. **(4 boda)**

Ako je $x < 0$, nejednakost zdesna je ispunjena, a slijeva dobivamo

$$(x + 5)^2 \leq 0$$

pa mora biti $x = -5$. **(4 boda)**

Završetak zadatka slijedi kao u 1. načinu. **(6 bodova)**

3. način. Zadanu jednadžbu možemo pisati ovako:

$$x^2 + 10x \cdot \sin(xy) + 25(\sin^2(xy) + \cos^2(xy)) = 0$$
$$(x + 5 \cdot \sin(xy))^2 + (5\cos(xy))^2 = 0. \quad \textbf{(6 bodova)}$$

Ova se jednadžba “raspada” na sustav

$$x + 5 \cdot \sin(xy) = 0 \tag{1}$$

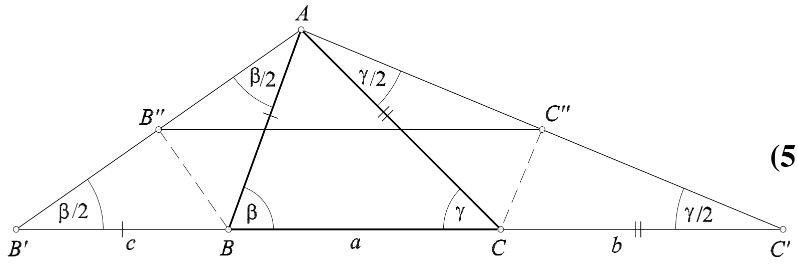
$$\cos(xy) = 0 \tag{2}$$

Zbog (2) dobivamo $\sin^2(xy) = 1 - \cos^2(xy) = 1$, tj. $\sin(xy) = \pm 1$. Prema (1) imamo $x \pm 5 = 0$, tj. $x = \pm 5$. **(8 bodova)**

Završetak slijedi kao prije. **(6 bodova)**

Zadatak 4. Produžimo stranicu BC preko vrhova B i C do točaka B' i C' tako da je $|BB'| = |AB| = c$, $|CC'| = |AC| = b$. Tada su trokuti $AB'B$ i $AC'C$ jednakokračni, pa kut pri vrhu B' iznosi $\beta/2$, a kut pri vrhu C' iznosi $\gamma/2$.

Neka su B'', C'' polovišta dužina $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$.



(5 bodova)

Lako se vidi da trokut $AB''C''$ ima duljine stranica

$$|AB''| = c\cos\frac{\beta}{2}, \qquad |AC''| = b\cos\frac{\gamma}{2}, \qquad |B''C''| = s$$

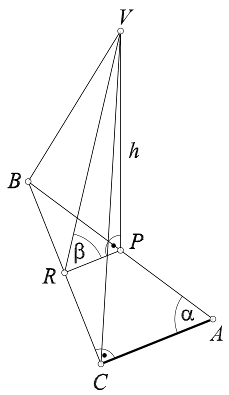
i kut pri vrhu A jednak

$$\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \pi - \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Zato je tražena jednakost upravo kosinusov poučak za stranicu $B''C''$ u tom trokutu. **(15 bodova)**

Zadatak 5. Ako su obočni bridovi piramide jednako nagnuti, onda projekcija vrha piramide pada u središte P opisane kružnice baze. Ta je baza pravokutan trokut, pa je to središte polovište hipotenuze. **(5 bodova)**

Nacrtajmo sliku:



(3 boda)

Volumen piramide je $V = \frac{1}{3}B \cdot h$. Odredimo najprije B. Zadana je hipotenuza c i kut α, pa su duljine kateta $c\sin\alpha$ i $c\cos\alpha$. Zato je

$$B = \frac{1}{2}c\sin\alpha \cdot c\cos\alpha = \frac{c^2\sin 2\alpha}{4}. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Visinu h hipotenuze računamo iz pravokutnog trokuta VPR. Tu je $\overline{PR}$ srednjica trokuta BCA. Zato je

$$h = |PR| \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}c\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Tako dobivamo

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2\sin 2\alpha}{4} \cdot \frac{c\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2} = \frac{c^3}{24}\cos\alpha\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta. \quad \textbf{(2 boda)}$$

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija, 9. ožujka 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Najprije odredimo faktorizaciju zadanog umnoška:

$$18\,900 = 189 \cdot 100 = 63 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 25 = 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

(5 bodova)

Najmanji takav broj.

Od brojeva 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 7 treba složiti što manje znamenaka. Tu je zadano 8 znamenaka, pa je najmanji broj kojeg možemo složiti od tih znamenaka šesteroznamenkasti broj. Naime, možemo grupirati sljedeće znamenke: $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, ili dva puta $2 \cdot 3 = 6$, ili $2 \cdot 3 = 6$ i $3 \cdot 3 = 9$.

Tako dobivamo tri skupa od po šest znamenaka: $\{3, 5, 5, 6, 6, 7\}$ ili $\{3, 4, 5, 5, 7, 9\}$ ili $\{2, 5, 5, 6, 7, 9\}$. **(8 bodova)**

Najmanji broj koji se može složiti od tih skupova znamenaka jest onaj koji počinje s 2, iz trećeg skupa znamenaka: 255 679. **(2 boda)**

Najveći takav broj.

Treba upotrijebiti što više znamenaka, pa bismo mogli pomisliti da je rješenje broj 75 533 322. Međutim, uočimo da možemo dobiti po volji velik broj koji zadovoljava uvjete zadatka tako da dodajemo niz znamenaka 1 na bilo koja mjesta u broju. Zbog toga najveći takav broj ne postoji. **(5 bodova)**

Zadatak 2. Riješimo sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} x + by &= s, \\ y + cz &= s, \\ z + ax &= s. \end{aligned}$$

Pomnožimo li te jednadžbe redom s 1, $-b$, bc i zbrojimo, dobivamo

$$x(1 + abc) = s(1 - b + bc),$$

tj.

$$x = s\frac{1 - b + bc}{1 + abc}. \quad \textbf{(10 bodova)}$$

Slično je

$$y = s\frac{1 - c + ca}{1 + abc}, \qquad z = s\frac{1 - a + ab}{1 + abc}. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Zato je

$$x : y : z = (1 - b + bc) : (1 - c + ca) : (1 - a + ab). \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Zadatak 3.

a) Stavimo $z = x + iy$. Dobivamo:

$$x - iy = x^3 - 3xy^2 + 3x^2yi - y^3i \quad \textbf{(3 boda)}$$

i odavde

$$\begin{cases} x(x^2 - 3y^2 - 1) = 0, \\ y(3x^2 - y^2 + 1) = 0. \quad \textbf{(2 boda)} \end{cases}$$

Mogućnost $x = 0$ daje $y(-y^2 + 1) = 0$, tj. $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$.

Ako je $x^2 - 3y^2 - 1 = 0$, tada iz $x^2 = 3y^2 + 1$ dobivamo $y(8y^2 + 4) = 0$ i odavde $y = 0$, $x = \pm 1$. Postoji dakle pet rješenja: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$, $z_4 = -1$, $z_5 = -i$. **(5 bodova)**

b) Najprije dobivamo

$$|z| = |\overline{z}| = |z^5| = |z|^5$$

pa mora biti $|z| = 0$ ili $|z|^4 = 1$, tj. $|z| = 1$. **(3 boda)** Odavde dobivamo prvo rješenje: $z_0 = 0$. **(2 boda)**

Neka je sad $z \neq 0$. Množenjem početne jednakosti sa z dobivamo ekvivalentnu:

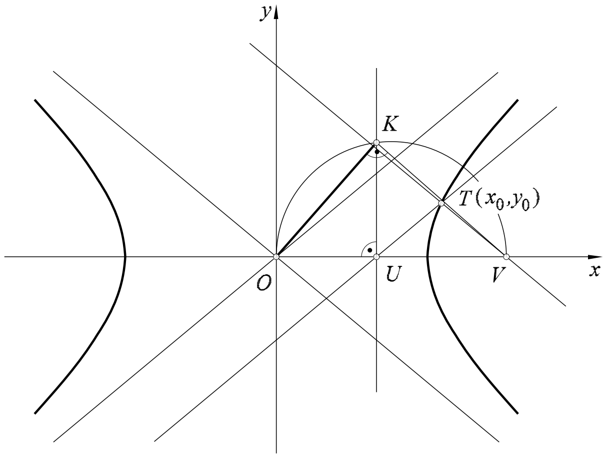
$$z\,\overline{z} = z^6 \implies |z|^2 = z^6$$

tj. $1 = z^6$ i odavde $z = \sqrt[6]{1}$. **(2 boda)**

Rješenja ove jednakosti su $z_k = \cos\dfrac{2k\pi}{6} + i\sin\dfrac{2k\pi}{6}$, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Tako dobivamo: $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2} \subset \frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -1$, $z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_6 = 1$. **(3 boda)**

Napomena. Oba se dijela mogu riješiti istovremeno, kao u postupku **b)**, promatranjem jednadžbe $z^n = \overline{z}$. Takav način treba priznati, ukoliko su ispisana rješenja za slučaj **a)** i slučaj **b)**.

Zadatak 4. Postavimo hiperbolu u koordinatni sustav tako da joj je središte O u ishodištu koordinatnog sustava te da ima jednadžbu $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ($a =$ duljina realne poluosi, $b =$ duljina imaginarne poluosi).



Asimptote imaju jednadžbe: $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$. Sve radimo za točku $T(x_0, y_0)$ koja se nalazi u prvom kvadrantu, ali potpuno analogno sve ide i ako je T u nekom od preostalih triju kvadranata. **(5 bodova)**

Tražimo koordinate točaka U i V:

$$\begin{cases} y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases} \implies U\left(-\frac{a}{b}y_0 + x_0, 0\right)$$

$$\begin{cases} y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases} \implies V\left(\frac{a}{b}y_0 + x_0, 0\right) \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Zbog Talesovog poučka kut $\sphericalangle OKV$ je pravi i trokut OUK sličan je trokutu OKV iz čega dobivamo:

$$\frac{|OK|}{|OU|} = \frac{|OV|}{|OK|} \implies |OK|^2 = |OU| \cdot |OV|.$$

Računamo analitički:

$$\begin{aligned} |OU| \cdot |OV| &= \left(-\frac{a}{b}y_0 + x_0\right) \cdot \left(\frac{a}{b}y_0 + x_0\right) \\ &= -\frac{a^2}{b^2}y_0^2 + x_0^2 = \frac{b^2x_0^2 - a^2y_0^2}{b^2} = \frac{a^2b^2}{b^2} = a^2. \end{aligned}$$

Dobili smo $|OK|^2 = a^2$ te je $|OK| = a$. **(10 bodova)**

(Svejedno je uzme li se za polukružnicu ona iznad ili ispod osi hiperbole, jer je situacija zrcalno simetrična.)

Zadatak 5. 1. način. Pokažimo najprije da je barem jedan od brojeva a_n ili b_n djeljiv s 5. Izračunajmo njihov umnožak:

$$\begin{aligned} a_n b_n &= [(2^{2n+1}+1)-2^{n+1}]\cdot[(2^{2n+1}+1)+2^{n+1}] \\ &= (2^{2n+1}+1)^2-(2^{n+1})^2 = 2^{4n+2}+2\cdot 2^{2n+1}+1-2^{2n+2} \\ &= 4^{2n+1}+1 = (4+1)(4^{2n}-4^{2n-1}+4^{2n-2}-\ldots-4+1) \\ &= 5\cdot(4^{2n}-4^{2n-1}+4^{2n-2}-\ldots-4+1). \end{aligned}$$

Izraz u zagradi je očito prirodan broj za svaki $n\in\mathbf{N}$. $a_n\cdot b_n$ djeljiv s 5 za svaki $n\in\mathbf{N}$. **(10 bodova)**

Pokažimo sad da oba ta broja ne mogu biti djeljiva s 5. U tu je svrhu dovoljno pogledati njihovu razliku:

$$b_n-a_n = 2\cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}.$$

Ta razlika nije djeljiva s 5, a jedan od brojeva a_n, b_n jeste. Zato drugi nije djeljiv s 5. **(10 bodova)**

2. način. Zadatak se može riješiti promatranjem ostataka pri djeljivosti s 5.

Niz 2^n pri dijeljenju sa 5 daje ostatke 2, 4, 3, 1,.... Ovi se ostatci dalje periodički ponavljaju s periodom 4. **(5 bodova)**

Niz 2^{n+1} daje ostatke 4, 3, 1, 2,.... Ostatci niza $2^{2n+1}=2^n\cdot 2^{n+1}$ pri dijeljenju s 5 najlakše se dobiju tako da se pomnože članovi prvih dvaju nizova. Tako dobivamo: 3, 2, 3, 2,.... Ovaj je niz periodički s periodom 2. **(5 bodova)**

Sve ove rezultate možemo napisati u obliku tabice:

n	2^n	2^{n+1}	2^{2n+1}	a_n	b_n
1	2	4	3	0	3
2	4	3	2	0	1
3	3	1	3	3	0
4	1	2	2	1	0
5	2	4	3	0	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

U svakom retku, točno jedan od posljednja dva broja jednak je nuli, pa je točno jedan od brojeva a_n, b_n djeljiv s 5. **(10 bodova)**