Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^2 + 11^2 = y^2.$$

Zadatak 2. Ako vrijedi

$$\frac{37}{13} = 2 + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}},$$

odredite $x, y, z \in \mathbf{N}$.

Zadatak 3. Odredite četveroznamenkasti broj koji je četiri puta manji od broja s istim znamenkama u obrnutom redoslijedu.

Zadatak 4. **a)** Riješite jednadžbu

$$|3x - 2| + |3x + 2| = 5.$$

b) Izračunajte površinu lika omeđenog pravcem $y = 5$ i grafom funkcije

$$y = \sqrt{9x^2 - 12x + 4} + \sqrt{9x^2 + 12x + 4}.$$

Zadatak 5. Unutar trokuta ABC s kutom $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ određena je točka D tako da vrijedi $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = 45^\circ$. Dokažite da je pravac BD okomit na pravac AC.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Odredite sva rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} |z+1+8i|^2 - |z+2+i|^2 = 100 \\ |z-5| = 5 \end{cases}$$

u skupu kompleksnih brojeva.

Zadatak 2. Stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ trokuta ABC produljene su (preko točaka B, C i A) do točaka D, E, F tako da bude $|BD| = 2|AB|$, $|CE| = 2|BC|$, $|AF| = 2|CA|$. Izračunajte omjer površina trokuta DEF i ABC.

Zadatak 3. Pravac p_1 presijeca graf kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ u točkama A i B. Pravac p_2 paralelan je pravcu p_1 i presijeca taj isti graf u točkama C i D. Dokažite da je suma apscisa točaka A i B jednaka sumi apscisa točaka C i D.

Zadatak 4. Odredite sva realna rješenja jednadžbe

$$x^3 + x^2 + x^1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} = 6.$$

Zadatak 5. Oko kružnice polumjera r opisan je jednakokračan trapez. Dokažite da duljina dijagonale trapeza nije manja od $2\sqrt{2}r$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Riješite jednadžbu

$$\log_2(4^x + 16) - \frac{2}{\log_5 4} = x + 1.$$

Zadatak 2. Koliki je zbroj duljina svih dijagonala pravilnog osmerokuta, kojemu stranice imaju duljinu 1?

Zadatak 3. U trokutu ABC točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ na dijelove duljina $u = |BD|$ i $v = |DC|$.

a) Ako je $\sphericalangle BDA = \varphi$, a duljina $|AD| = t$, izrazite b i c pomoću t, u, v i φ.

b) Izrazite duljinu t pomoću b, c, u i v.

Zadatak 4. Opseg pravokutnika je $2s$, a površina $\frac{3}{16}s^2$. Izračunajte tangens kuta što ga određuju dijagonale pravokutnika.

Zadatak 5. Osnovica piramide $ABCV$ je pravokutan trokut ABC s hipotenuzom $|AB| = c$ i kutom $\sphericalangle A = \alpha$. Pobočni bridovi jednako su nagnuti prema ravnini osnovice, a ravnina BCV zatvara s ravninom ABC kut β. Odredite volumen piramide.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Suma triju pozitivnih brojeva α, β, γ jednaka je $\frac{\pi}{2}$. Izračunajte

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \gamma,$$

ako je poznato da $\operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \beta$, $\operatorname{ctg} \gamma$ čine aritmetički niz.

Zadatak 2. Zadan je niz: 1, 8, 22, 43,. . . u kojem razlike uzastopnih članova tvore aritmetički niz. Koji je po redu broj 35 351 u tom nizu?

Zadatak 3. Ako za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$f(x+1) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)},$$

pokažite da je f periodička funkcija.

Zadatak 4. U koordinatnom sustavu dane su točke $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(0,h)$, pri čemu je $a > 0$, $b < 0$ i $h > 0$. Odredite skup koji čine središta svih pravokutnika koji su upisani u trokut ABC, tako da su mu dva vrha na stranici $\overline{AB}$, a po jedan vrh na svakoj od ostalih stranica.

Zadatak 5. Odredite, ako postoje, najmanji i najveći prirodni broj kojem je umnožak znamenaka 18 900.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija, 9. ožujka 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Zadana jednakost ekvivalentna je s

$$11^2 = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x).$$

Kako je 11 prost broj, broj $y-x$ poprima jednu od vrijednosti ± 1, ± 11 ili $\pm 11^2$. **(5 bodova)**

a) Neka je $y-x=1$, tada je $x+y=11^2$. Rješenje ovog sustava je $x=60$, $y=61$.

Ako je $y-x=-1$, tada je $x+y=-11^2$. Rješenje ovog sustava je $x=-60$, $y=-61$. **(5 bodova)**

b) Neka je $y-x=11$, tada je $x+y=11$. Rješenje ovog sustava je $x=0$, $y=11$.

Ako je $y-x=-11$, tada je $x+y=-11$. Rješenje ovog sustava je $x=0$, $y=-11$. **(5 bodova)**

c) Neka je $y-x=11^2$, tada je $x+y=1$. Rješenje ovog sustava je $x=-60$, $y=61$.

Neka je $y-x=-11^2$, tada je $x+y=-1$. Rješenje ovog sustava je $x=60$, $y=-61$. **(5 bodova)**

Napomena. Ukoliko učenik ne navede neko od rješenja, za svako koje nedostaje treba oduzeti 3 boda.

Zadatak 2. 1. način. Vrijedi $\dfrac{37}{13} = 2 + \dfrac{11}{13}$ pa je

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{13}{11} = 1 + \frac{2}{11}$$

Kako su x, y i z prirodni brojevi, drugi pribrojnik slijeva je manji od 1, pa mora biti $x=1$. **(10 bodova)**

$$y + \frac{1}{z} = \frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}.$$

Sad zaključujemo da je $y=5$ i $z=2$. **(10 bodova)**

Napomena. Treba priznati i ona rješenja u kojima se ne raspravi jednoznačnost.

2. način. Zadana se jednadžba može srediti na sljedeći način:

$$\frac{37}{13} = 2 + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}},$$

$$\frac{11}{13} = \cfrac{1}{x + \cfrac{z}{yz+1}} = \frac{yz+1}{xyz+x+z},$$

$$11(xyz+x+z) = 13(yz+1), \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

$$11x(yz+1) + 11z = 13(yz+1),$$

$$(yz+1)(13-11x) = 11z. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Broj $13-11x$ mora biti pozitivan, pa je zato $x=1$. **(5 bodova)**

Sada je $2(yz+1)=11z$, odnosno

$$z(11-2y)=2$$

Broj $11-2y$ je neparan, pa mora biti $z=2$, $11-2y=1$, odakle slijedi $y=5$. **(5 bodova)**

Zadatak 3. Prema uvjetu je $\overline{abcd}\cdot 4=\overline{dcba}$ pa mora biti $a<3$. Naime, $3000\cdot 4=12\,000$ – broj s 5 znamenaka.

Broj $\overline{dcba}$ je paran broj, pa a mora biti paran broj. Zato je $a=2$. **(5 bodova)**

Dalje imamo:

$$\overline{2bcd}\cdot 4=\overline{dcb2} \implies d\geq 8.$$

Pošto produkt $4\cdot d$ završava s 2, mora biti $d=8$. **(5 bodova)**

$$\begin{gathered}\overline{2bc8}\cdot 4=\overline{8cb2}\\ (2000+100b+10c+8)\cdot 4=8000+100c+10b+2\\ 400b+40c+32=100c+10b+2\\ 390b+30=60c \;/\; :30\\ 13b+1=2c\end{gathered}$$

Broj $2c$ nije veći od 18. Zato mora biti $b=1$, pa je $c=7$. Traženi broj je 2178. **(10 bodova)**

Zadatak 4. **a)** Skup $\mathbf{R}$ rastavit ćemo na tri intervala:

1) $x<-\frac{2}{3}$. Tu jednadžba glasi

$$-3x+2-3x-2=5 \implies x=-\frac{5}{6}.$$

Rješenje zadovoljava, jer pripada intervalu.

2) $-\frac{2}{3}\leq x\leq \frac{2}{3}$. Tu jednadžba glasi

$$-3x+2+3x+2=5 \implies 4=5.$$

Jednadžba nema rješenja na tom intervalu.

3) $x>\frac{2}{3}$. Tu jednadžba glasi

$$3x-2+3x+2=5 \implies x=\frac{5}{6}.$$

Rješenje zadovoljava, jer pripada intervalu. **(8 bodova)**

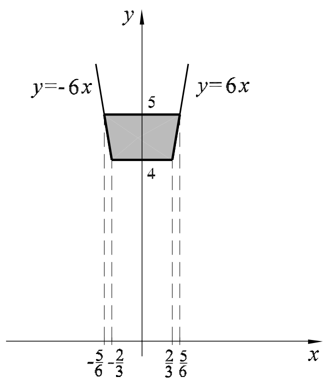
b) Primijetimo da vrijedi:

$$\begin{aligned} y&=\sqrt{9x^2-12x+4}+\sqrt{9x^2+12x+4}\\ &=\sqrt{(3x-2)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}=|3x-2|+|3x+2| \qquad \textbf{(2 boda)}\end{aligned}$$

Prema dijelu **a)**, ova funkcija ima sljedeći prikaz:

$$y=\begin{cases} -6x, & x<-\frac{2}{3},\\ 4, & -\frac{2}{3}\leq x\leq \frac{2}{3},\\ 6x, & \frac{2}{3}<x \end{cases}$$

Njezin graf izgleda ovako:

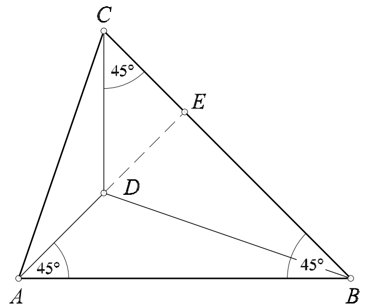


(5 bodova)

Lik omeđen grafom ove funkcije i pravcem $y = 5$ je trapez s vrhovima $(-\frac{5}{6}, 5)$, $(-\frac{2}{3}, 4)$, $(\frac{2}{3}, 4)$, $(\frac{5}{6}, 5)$. Njegove osnovice imaju duljine $2 \cdot \frac{5}{6}$ i $2 \cdot \frac{2}{3}$, a visina mu iznosi 1. Zato mu je površina

$$P = \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Zadatak 5. Nacrtajmo sliku:



(3 boda)

Točka E je presjek pravaca BC i AD. Trokut ABE ima dva kuta od 45°, pa je pravokutan. Zato je $AD \perp CB$. **(5 bodova)**

Iz istog razloga je $CD \perp AB$. Dakle, na pravcima AD i CD leže visine trokuta ABC, pa je D ortocentar trokuta ABC. Odatle slijedi da je $BD \perp AC$. **(12 bodova)**

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija,
9. ožujka 2007.

Rješenja

Zadatak 1. 1° Stavimo $z = x + yi$. Iz prvog uvjeta dobivamo

$$\begin{gathered}(x+1)^2 + (y+8)^2 - (x+2)^2 - (y+1)^2 = 100 \\ 2x + 1 + 16y + 64 - 4x - 4 - 2y - 1 = 100 \\ 14y - 2x + 60 = 100 \\ 7y - x = 20 \\ y = \frac{1}{7}x + \frac{20}{7} \quad \textbf{(8 bodova)}\end{gathered}$$

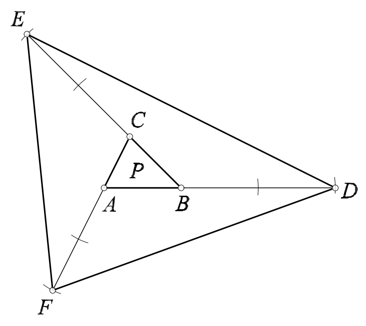
2° Iz drugog uvjeta slijedi

$$\begin{gathered}(x-5)^2 + y^2 = 25, \\ (x-5)^2 + \left(\frac{1}{7}x + \frac{20}{7}\right)^2 = 25 \\ (x-5)^2 \cdot 49 + (x+20)^2 = 49 \cdot 25 \\ 50x^2 - 450x + 400 = 0 \ / \ : 50 \\ x^2 - 9x + 8 = 0 \quad \textbf{(8 bodova)}\end{gathered}$$

Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobivamo dva rješenja:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1 & y_1 = 3 & z_1 = 1 + 3i \\ x_2 = 8 & y_2 = 4 & y_2 = 8 + 4i \quad \textbf{(4 boda)} \end{array}$$

Zadatak 2. Nacrtajmo sliku:



(3 boda)

Neka je P površina trokuta ABC. U trokutu AFD stranica AF dvostruko je dulja od stranice AC, a visina na tu stranicu je trostruko dulja nego visina u trokutu ABC. Zato je

$$P_{AFD} = 6 \cdot P_{ABC} = 6P. \quad \textbf{(7 bodova)}$$

Na isti način dobivamo $P_{BDE} = 6P$, $P_{ECF} = 6P$.

Zato je

$$P_{DEF} = 6P + 6P + 6P + P = 19P = 19 \cdot P_{ABC}. \quad \textbf{(10 bodova)}$$

Zadatak 3. Apscise točaka A i B zadovoljavaju kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = kx + b_1$, a apscise točaka C i D jednadžbu $ax^2 + bx + c = kx + b_2$. **(5 bodova)**

Iz Vièteovih formula rješenja u obje jednadžbe zadovoljavaju $x_1 + x_2 = \dfrac{k-b}{a}$. **(15 bodova)**

Zadatak 4. Jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 6. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Iskoristit ćemo supstituciju: $t = x + \dfrac{1}{x}$. Onda je

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \implies x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$t^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \implies x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Tako jednadžba prelazi u:

$$t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0.$$

Grupiranjem pogodnih članova dolazimo do sljedeće faktorizacije:

$$\begin{gathered} t^3 - 8 + t^2 - 2t = 0, \\ (t-2)(t^2 + 2t + 4) + t(t-2) = 0, \\ (t-2)(t^2 + 3t + 4) = 0 \quad \textbf{(5 bodova)} \end{gathered}$$

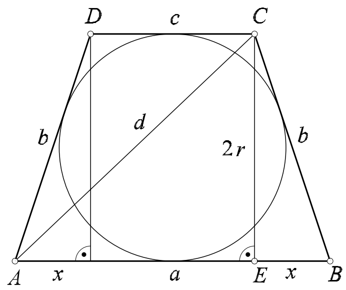
Zaključujemo da mora biti $t - 2 = 0$ ili $t^2 + 3t + 4 = 0$. Jednadžba $t^2 + 3t + 4 = 0$ nema rješenja u skupu realnih brojeva.

Za $t - 2 = 0$, odnosno $t = 2$, dobivamo

$$x + \frac{1}{x} = 2 \implies x^2 - 2x + 1 = 0$$

pa mora biti $x = 1$. **(5 bodova)**

Zadatak 5. Nacrtajmo sliku:



(3 boda)

Iz pravokutnog trokuta ACE imamo $d^2 = (2r)^2 + (x+c)^2$. Dalje je

$$x + c = |AE| = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+c}{2}. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Trapez je u ovom slučaju tangencijalni četverokut, pa u njemu vrijedi da je zbroj jednog para suprotnih stranica jednak zbroju drugog para suprotnih stranica. Zato je $x + c = \dfrac{2b}{2} = b$. **(5 bodova)**

Dalje možemo uočiti da je $b \geq 2r$, te je

$$d^2 = (2r)^2 + b^2 \geq (2r)^2 + (2r)^2 = 8r^2.$$

Dakle, $d^2 \geq 8r^2$, pa je $d \geq 2\sqrt{2}r$, što je i trebalo dokazati. **(7 bodova)**

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija,
9. ožujka 2007.

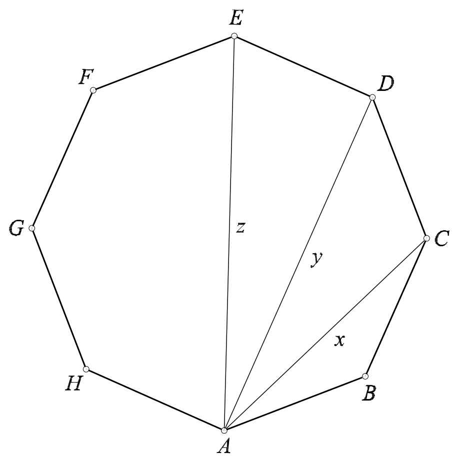
Rješenja

Zadatak 1. Dana jednadžba ekvivalentna je redom sa:

$$\log_2(4^x+16)-2\log_4 5 = x+1,$$
$$\log_2(4^x+16)-\log_2 5 = x+1,$$
$$\log_2\frac{4^x+16}{5} = x+1, \qquad \textbf{(5 bodova)}$$
$$\frac{4^x+16}{5} = 2^{x+1},$$
$$4^x-10\cdot 2^x+16=0. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

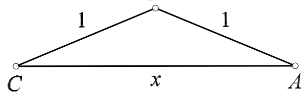
Neka je $2^x = t$. Tada je $t^2-10t+16=0$, odakle dobijemo $t_1=8$, $t_2=2$. **(5 bodova)** Iz $2^x=8$ slijedi $x_1=3$, a iz $2^x=2$ slijedi $x_2=1$. **(5 bodova)**

Zadatak 2. Prvo rješenje. Označimo s x, y i z duljine dijagonala od najkraće prema najduljoj.



Najduljih dijagonala ima četiri, dok preostalih dviju ima po osam, pa je zbroj duljina dijagonala jednak $8x+8y+4z$. **(5 bodova)**

Izračunajmo x. Kut pravilnog osmerokuta je $135°$.



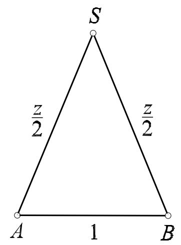
Prema kosinusovom poučku je

$$x^2 = 1^2+1^2-2\cos 135^o = 2+\sqrt{2},$$

pa je

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Izračunajmo z.



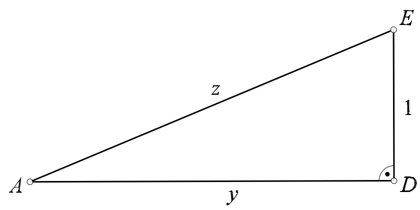
Opet prema kosinusovom poučku imamo

$$1^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{z}{2} \cdot \frac{z}{2} \cdot \cos 45^o = \frac{z^2}{2} - \frac{z^2\sqrt{2}}{4},$$

odakle slijedi

$$z = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Konačno, izračunajmo y. Trokut ADE je pravokutan (četverokut $ADEH$ je paralelogram koji je centralnosimetričan, pa mora biti pravokutnik).



Primjenom Pitagorinog poučka dobivamo:

$$y^2 = z^2 - 1 = 3 + 2\sqrt{2},$$

t.j.

$$y^2 = \sqrt{3 + \sqrt{2}}. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Zbroj duljina dijagonala je, dakle, $8\sqrt{2 + \sqrt{2}} + 8\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + 4\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.

Drugo rješenje. Nakon što smo izračunali x, računamo y. Kut pri vrhu C u trokutu ACD iznosi

$$135^\circ - \tfrac{1}{2} \cdot 45^\circ = 112^\circ 30'.$$

Primjenom kosinusovog poučka u tom trokutu, dobivamo

$$y^2 = x^2 + 1^2 - 2x \cos 112^o 30'$$

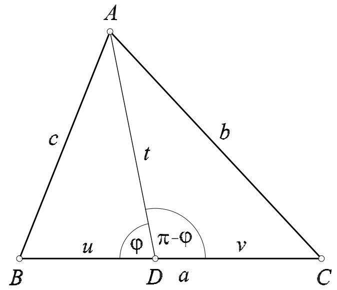
t.j.

$$y = \sqrt{2 + \sqrt{2} + 1 + 2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Pri tome smo koristili $\cos 112^o 30' = -\sqrt{\frac{1+\cos 225^0}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Tada računamo $z = \sqrt{y^2+1} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

Zadatak 3. **a)** Označimo duljine stranica kao na slici



Prema kosinusovom poučku u trokutu ABD vrijedi

(1) $$c^2 = u^2 + t^2 - 2ut\cos\varphi$$ **(5 bodova)**

Prema kosinusovom poučku u trokutu CAD vrijedi

(2) $$b^2 = v^2 + t^2 - 2vt\cos(\pi - \varphi) = v^2 + t^2 + 2vt\cos\varphi$$ **(5 bodova)**

(5 bodova)

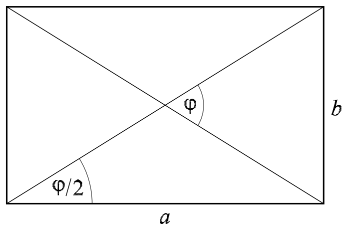
b) Pomnožimo (1) s v, (2) s u i zbrojimo:

$$vc^2 + ub^2 = vu^2v + uv^2 + (v+u)t^2 = uv(u+v) + (u+v)t^2$$

Odavde je

$$t^2 = \frac{vc^2 + ub^2}{u+v} - uv.$$ **(10 bodova)**

Zadatak 4. Označimo li duljine stranica pravokutnika a i b, a kut između dijagonala s φ, tada je $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}$.



Označimo $x = \frac{b}{a}$. Bez gubljenja na općenitosti možemo uzeti da je $a \geq b$, to jest $x \leq 1$. Iz zadanih uvjeta slijedi

$$ab = \frac{3}{16}s^2. \tag{1}$$

i $a + b = s$. **(3 boda)**

Odavde je $a^2 + b^2 + 2ab = s^2$, to jest

$$a^2 + b^2 = \frac{5}{8}s^2. \qquad \textbf{(2 boda)} \tag{2}$$

Iz (1) i (2) imamo

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{10}{3}, \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{10}{3}, \qquad \frac{1}{x} + x = \frac{10}{3}. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Budući je $x \neq 0$, ovu jednadžbu možemo pomnožiti s x i dobijemo

$$3x^2 - 10x + 3 = 0.$$

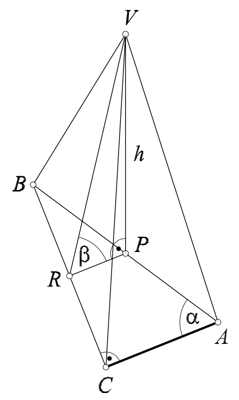
Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 3$. Zbog $x \leq 1$, samo prvo uzimamo u obzir.

Sada imamo $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}$ **(5 bodova)** . Odatle je

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Zadatak 5. Ako su pobočni bridovi piramide jednako nagnuti, onda projekcija vrha piramide pada u središte P opisane kružnice baze. Ta je baza pravokutan trokut, pa je to središte polovište hipotenuze. **(5 bodova)**

Nacrtajmo sliku:



(3 boda)

Volumen piramide je $V = \frac{1}{3}B \cdot h$. Odredimo najprije B. Zadana je hipotenuza c i kut α, pa su duljine kateta $c\sin\alpha$ i $c\cos\alpha$. Zato je

$$B = \frac{1}{2}c\sin\alpha \cdot c\cos\alpha = \frac{c^2\sin 2\alpha}{4}. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Visinu h piramide računamo iz pravokutnog trokuta VPR. Tu je $\overline{PR}$ srednjica trokuta BCA. Zato je

$$h = |PR| \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}c\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta. \quad \textbf{(5 bodova)}$$

Tako dobivamo

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2\sin 2\alpha}{4} \cdot \frac{c\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2} = \frac{c^3}{24}\cos\alpha\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta. \quad \textbf{(2 boda)}$$

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija,
9. ožujka 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Prema pretpostavci, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\gamma$ čine aritmetički niz, pa je zato $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma}{2}$. **(2 boda)** Iz adicijskog teorema za kotangens:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma} \qquad \textbf{(3 boda)}$$

dobivamo

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma &= 1 + (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma)\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)\\ &= 1 + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\\ &= 1 + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\beta = 1+2 = 3. \qquad \textbf{(15 bodova)}\end{aligned}$$

Zadatak 2. Označimo zadani niz s $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Tražimo n za koji je $a_n = 35\,351$. Zbrojanjem sljedećih jednakosti:

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 7\\ a_3 - a_2 &= 14 = 2\cdot 7\\ a_4 - a_3 &= 21 = 3\cdot 7\\ &\vdots\\ a_n - a_{n-1} &= (n-1)\cdot 7\end{aligned}\right\} +$$

dobivamo

$$a_n - a_1 = 7 + 2\cdot 7 + 3\cdot 7 + \ldots + (n-1)\cdot 7 \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Zato je

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + 7(1+2+3+\ldots+(n-1))\\ &= 1 + 7\cdot\frac{n-1}{2}[1+(n-1)\cdot 1]\\ &= 1 + 7\cdot\frac{n(n-1)}{2} = 35\,351 \qquad \textbf{(5 bodova)}\end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$n^2 - n - 10\,100 = 0 \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

koja ima rješenje $n = 101$. **(5 bodova)**

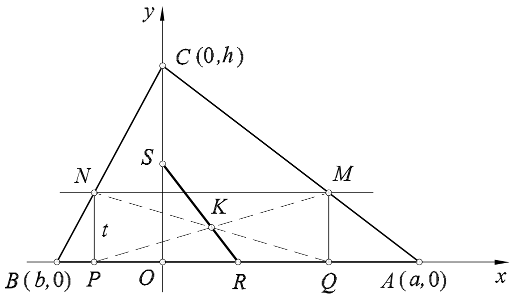
Zadatak 3. Izračunajmo vrijednost funkcije f za argument $x+2$:

$$f(x+2) = \frac{1-f(x+1)}{1+f(x+1)} = \frac{1-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}$$

$$= \frac{\frac{1+f(x)-1+f(x)}{1+f(x)}}{\frac{1+f(x)+1-f(x)}{1+f(x)}} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Dakle, vrijedi $f(x+2) = f(x)$ za svaki $x \in \mathbf{R}$, pa je f periodična funkcija s periodom 2. **(20 bodova)**

Zadatak 4. Nacrtajmo sliku



(3 boda)

Pravac AC ima jednadžbu

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1.$$

Pravac BC ima jednadžbu

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1. \quad \textbf{(2 boda)}$$

Varijabilnu visinu pravokutnika $PQMN$ označimo s t. Prema tome, jednadžba pravca MN glasi:

$$y = t.$$

M je presjek pravca AC s pravcem NM. Iz sustava

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1, \qquad y = t$$

zaključujemo da M ima koordinate

$$\frac{a}{h}(h-t), \quad t.$$

Iz sustava

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1, \qquad y = t$$

zaključujemo da N ima koordinate

$$\frac{b}{h}(h-t), \quad t. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Apscisa točke K (središta pravokutnika) je aritmetička sredina apscisa točaka M i N dok je ordinata točke K polovina ordinate od M. Zato su koordinate točke K:

$$x = \frac{a+b}{2h}(h-t), \quad y = \frac{t}{2}.$$

Da nađemo traženo geometrijsko mjesto, moramo vidjeti koji je skup točaka zadan tim jednadžbama. Eliminirajmo t. Veza $t = 2y$ uvrštena u x daje:

$$2h \cdot x + 2(a+b) \cdot y = h(a+b),$$
$$\frac{x}{\frac{a+b}{2}} + \frac{y}{\frac{h}{2}} = 1.$$

Dobili smo jednadžbu pravca. Traženi je skup točaka dio tog pravca. **(5 bodova)**

Kad se pravokutnik mijenja tako da mu visina raste od 0 do h, točka K putuje od točke $R(0, \frac{h}{2})$, do točke $S\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$

Traženi skup točaka (otvorena) dužina $\overline{RS}$, gdje je R polovište baze, a S polovište pripadne visine. **(5 bodova)**

Zadatak 5. Najprije odredimo faktorizaciju zadanog umnoška:

$$18\,900 = 189 \cdot 100 = 63 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 25 = 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

(5 bodova)

Najmanji takav broj.

Od brojeva 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 7 treba složiti što manje znamenaka. Tu je zadano 8 znamenaka, pa je najmanji broj kojeg možemo složiti od tih znamenaka šesteroznamenkasti broj. Naime, možemo grupirati sljedeće znamenke: $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, ili dva puta $2 \cdot 3 = 6$, ili $2 \cdot 3 = 6$ i $3 \cdot 3 = 9$.

Tako dobivamo tri skupa od po šest znamenaka: $\{3, 5, 5, 6, 6, 7\}$ ili $\{3, 4, 5, 5, 7, 9\}$ ili $\{2, 5, 5, 6, 7, 9\}$. **(8 bodova)**

Najmanji broj koji se može složiti od tih skupova znamenaka jest onaj koji počinje s 2, iz trećeg skupa znamenaka: 255 679. **(2 boda)**

Najveći takav broj.

Treba upotrijebiti što više znamenaka, pa bismo mogli pomisliti da je rješenje broj 75 533 322. Međutim, uočimo da možemo dobiti po volji velik broj koji zadovoljava uvjete zadatka tako da dodajemo niz znamenaka 1 na bilo koja mjesta u broju. Zbog toga najveći takav broj ne postoji. **(5 bodova)**