Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola

Primošten, 7. travnja 2008.

1. Tri djevojčice Ana, Iva i Maja, u šumi su skupile 770 kestena i odlučile ih međusobno podijeliti proporcionalno svojim godinama. Svaki put kada je Iva uzela 4 kestena, Ana je uzela 3, a na svakih 6 što ih je uzela Iva, Maja je uzimala 7 kestena.

   Koliko godina ima svaka djevojčica ako zajedno imaju 35 godina? Koliko je kestena pripalo svakoj od njih?

2. Cijena nekog materijala snižena je 52%. Nakon tog sniženja, za iznos od 240 kn može se kupiti 1 metar materijala više nego što se moglo kupiti prije sniženja za 270 kn. Odredi cijenu tog materijala prije sniženja.

3. Koliki je zbroj svih peteroznamenkastih brojeva zapisanih pomoću znamenki 1, 2, 3, 4 i 5, pri čemu se svaka znamenka pojavljuje točno jedanput?

4. U konveksnom četverokutu $ABCD$ točke E, F, G su redom polovišta stranica $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ i $\overline{AB}$. Pritom je $GE \perp AD$, $GF \perp CD$. Izračunaj $|\sphericalangle ACB|$.

5. Dan je pravokutnik $ABCD$. Na simetrali stranice $\overline{AB}$, odnosno $\overline{BC}$ nalaze se točke E i G, odnosno F i H tako da je $|ES| = |SH|$ i $|FS| = |SG|$, pri čemu je točka S sjecište simetrala stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Dokaži da je četverokut $EFGH$ jednakokračan trapez.

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

1. Neka su

$$\begin{aligned} a & \; - \; \text{Anine godine,} \\ i & \; - \; \text{Ivine godine,} \\ m & \; - \; \text{Majine godine,} \\ & a+i+m=35. \end{aligned}$$

Godine se odnose kao kesteni:

$$\begin{aligned} & i : a = 4 : 3, \quad i : m = 6 : 7 \\ \Longrightarrow \quad & a = \frac{3}{4}i, \quad m = \frac{7}{6}i \\ \Longrightarrow \quad & i + \frac{3}{4}i + \frac{7}{6}i = 35 \\ \Longrightarrow \quad & \frac{12i + 9i + 14i}{12} = 35 \Longrightarrow \frac{35}{12}i = 35 \\ \Longrightarrow \quad & i = 12, \quad a = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9, \quad m = \frac{7}{6} \cdot 12 = 14. \end{aligned}$$

Kako je $770 : 35 = 22$, onda je Ivi pripalo $22 \cdot 12 = 264$ kestena, Ani $22 \cdot 9 = 198$ kestena, a Maji $22 \cdot 14 = 308$ kestena.

Iva ima 12 godina i 264 kestena, Ana ima 9 godina i 198 kestena, a Maja ima 14 godina i 308 kestena.

2. Neka je

$$\begin{aligned} & x - \text{cijena materijala,} \\ & y - \text{količina materijala u metrima.} \end{aligned}$$

Nakon sniženja cijena je

$$x - 52\%x = x - 0.52x = 0.48x.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} 240 &= 0.48x \cdot (y+1), \\ 240 &= 0.48x \cdot y + 0.48x. \end{aligned}$$

Prije sniženja vrijedi

$$270 = x \cdot y.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} 240 &= 0.48 \cdot 270 + 0.48x \\ 240 &= 129.6 + 0.48x \\ 0.48x &= 110.4 \\ x &= \frac{110.4}{0.48} \\ x &= 230. \end{aligned}$$

Cijena prije sniženja bila je 230 kn.

3. Takvih brojeva ima $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Zapišimo svaki od tih brojeva u obliku

$$10\,000a + 1000b + 100c + 10d + e.$$

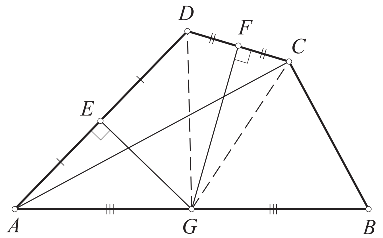
Prilikom zbrajanja tih brojeva, na dekadskom mjestu jedinica nalazi se po 24 jedinice, dvojke, trojke, četvorke i petice. Isto se nalazi na mjestu desetica, stotica, tisućica i desettisućica. Zbroj svih znamenki na pojedinom dekadskom mjestu je

$$\begin{aligned} n &= 24 \cdot 5 + 24 \cdot 4 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 2 + 24 \cdot 1 \\ &= 24(5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 360. \end{aligned}$$

Prema tome, zbroj svih tih brojeva je

$$\begin{aligned} &10\,000n + 1000n + 100n + 10n + n \\ &\qquad = (10\,000 + 1000 + 100 + 10 + 1) \cdot n \\ &\qquad = 11\,111 \cdot 360 = 3\,999\,960. \end{aligned}$$

4.



Kako je $|AE| = |ED|$, $|\sphericalangle GEA| = |\sphericalangle DEG| = 90°$ i $\overline{GE}$ zajednička stranica trokuta $\triangle AGE$ i $\triangle DGE$, prema teoremu S-K-S o sukladnosti slijedi $\triangle AGE \cong \triangle DGE$. Iz sukladnosti slijedi $|AG| = |GD|$.

Analogno, $\triangle GFD \cong \triangle GFC$ pa je $|GD| = |GC|$.

Dakle, $|AG| = |GD| = |GC|$ i $|AG| = |GB|$ što znači da je $|GC| = |GB|$ odnosno trokut $\triangle GBC$ je jednakokračan.

Također, trokut $\triangle AGC$ je jednakokračan.

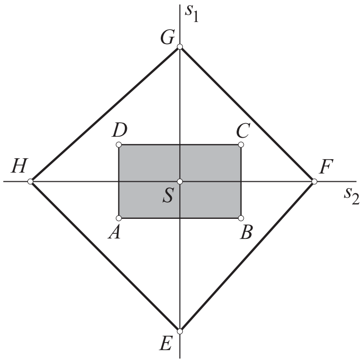
Neka je $|\sphericalangle CAG| = \alpha$.

Tada je $|\sphericalangle GCA| = \alpha$, pa je $|\sphericalangle CGB| = |\sphericalangle CAG| + |\sphericalangle GCA| = 2\alpha$.

Dalje je $|\sphericalangle BCG| = |\sphericalangle GBC| = \dfrac{180° - |\sphericalangle CGB|}{2} = 90° - \alpha$.

Na kraju, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle GCA| + |\sphericalangle BCG| = \alpha + 90° - \alpha = 90°$.

5. Neka je s_1 simetrala stranice $\overline{AB}$, a s_2 simetrala stranice $\overline{BC}$.



Kako je $s_1 \perp AB$, $s_2 \perp BC$ i $AB \perp BC$, onda je i $s_1 \perp s_2$.

Budući da je $|ES| = |SH|$ i $|\sphericalangle ESH| = 90°$, onda je $\triangle ESH$ jednakokračan pravokutan pa je $|\sphericalangle HES| = |\sphericalangle SHE| = 45°$.

No, i $|FS| = |SG|$ i $|\sphericalangle GSF| = 90°$ te je i $\triangle FGS$ jednakokračan pravokutan, odnosno $|\sphericalangle SFG| = |\sphericalangle FGS| = 45°$.

S obzirom da je $|\sphericalangle FSE| = 90°$, onda je $\triangle EFS$ pravokutan pa je $|\sphericalangle SEF| + |\sphericalangle EFS| = 90°$.

Dalje je

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle HEF| + |\sphericalangle EFG| &= (|\sphericalangle HES| + |\sphericalangle SEF|) + (|\sphericalangle EFS| + |\sphericalangle SFG|) \\
&= |\sphericalangle HES| + (|\sphericalangle SEF| + |\sphericalangle EFS|) + |\sphericalangle SFG| \\
&= 45° + 90° + 45° = 180°.
\end{aligned}$$

To znači da je $EH \| FG$ te je $\square\, EFGH$ trapez.

Kako je $|ES| = |SH|$, $|\sphericalangle FSE| = |\sphericalangle HSG| = 90°$ i $|FS| = |SG|$, prema teoremu S-K-S o sukladnosti slijedi $\triangle EFS \cong \triangle HGS$.

Iz sukladnosti slijedi $|EF| = |HG|$ te je time tvrdnja dokazana.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

Primošten, 7. travnja 2008.

1. Odredi vrijednost izraza $a(a+2)+c(c-2)-2ac$, ako je $a-c=7$.

2. Usporedi brojeve $\sqrt{2006}+\sqrt{2010}$ i $2\sqrt{2008}$.

3. Šest učenika, označimo ih s A, B, C, D, E i F, rješavali su neki zadatak. Zadatak su riješila dvojica. Na pitanje: "Tko je riješio?", oni su dali pet odgovora

   1) A i C;
   2) B i E;
   3) F i A;
   4) B i F;
   5) D i A.

   U četiri od ovih pet odgovora jedan je dio točan, a drugi netočan, dok su u jednom odgovoru oba dijela netočna.

   Koji su učenici riješili zadatak?

4. U pravokutniku $ABCD$ točka M je polovište dužine $\overline{AB}$, a točka E presjek dijagonale $\overline{AC}$ i dužine $\overline{DM}$. Ako je $|AB| = 2\sqrt{2}$ cm i $|BC| = 2$ cm, dokaži da je $|\sphericalangle CED| = 90°$.

5. Zadan je pravokutnik $ABCD$ takav da je $|AB| = 3|BC|$. Na stranici $\overline{AB}$ dana je točka P takva da je $|AP| = \frac{1}{3}|AB|$. Dokaži da je

$$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle CPB| = 45°.$$

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

1. Napišimo dani izraz u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} a(a+2)+c(c-2)-2ac &= a^2+2a+c^2-2c-2ac \\ &= (a-c)^2+2(a-c) \\ &= 7^2+2\cdot 7 = 49+14 \\ &= 63. \end{aligned}$$

2. Vrijedi

$$\begin{aligned} (\sqrt{2006}+\sqrt{2010})^2 &= (\sqrt{2006})^2+2\cdot\sqrt{2006}\cdot\sqrt{2010}+(\sqrt{2010})^2 \\ &= 2006+2\sqrt{2006\cdot 2010}+2010 \\ &= 4016+2\sqrt{2006\cdot 2010} \\ &= 2\cdot 2008+2\sqrt{2006\cdot 2010} \\ &= 2\cdot(2008+\sqrt{2006\cdot 2010}). \end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \sqrt{2006\cdot 2010} &= \sqrt{(2008-2)(2008+2)} \\ &= \sqrt{2008^2-2^2} \\ &= \sqrt{2008^2-4} \\ &< \sqrt{2008^2} \\ &= 2008. \end{aligned}$$

Zato slijedi

$$(\sqrt{2006}+\sqrt{2010})^2 < 2\cdot(2008+2008) = 4\cdot 2008.$$

Korjenovanjem nejednakosti slijedi

$$\sqrt{2006}+\sqrt{2010} < 2\sqrt{2008}.$$

3. Ako je u oba dijela:
1) netočan

$$\begin{array}{cccc} - & A & C & - \\ - & B & E & + \\ + & F & A & - \\ - & B & F & + \\ + & D & A & - \end{array} \Longrightarrow$$

A	B	C	D	E	F
N	N	N	T	T	T

što nije moguće.

2) netočan

$$\begin{array}{cccc} - & A & C & + \\ - & B & E & - \\ + & F & A & - \\ - & B & F & + \\ + & D & A & - \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & E & F \\ \hline \text{N} & \text{N} & \text{T} & \text{T} & \text{N} & \text{T} \\ \hline \end{array} \quad \text{što nije moguće.}$$

3) netočan

$$\begin{array}{cccc} - & A & C & + \\ + & B & E & - \\ - & F & A & - \\ + & B & F & - \\ + & D & A & - \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & E & F \\ \hline \text{N} & \text{T} & \text{T} & \text{T} & \text{N} & \text{N} \\ \hline \end{array} \quad \text{što nije moguće.}$$

4) netočan

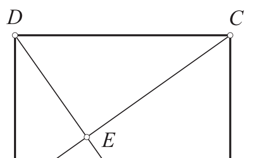
$$\begin{array}{cccc} + & A & C & - \\ - & B & E & + \\ - & F & A & + \\ - & B & F & - \\ - & D & A & + \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & E & F \\ \hline \text{T} & \text{N} & \text{N} & \text{N} & \text{T} & \text{N} \\ \hline \end{array}$$

5) netočan

$$\begin{array}{cccc} - & A & C & + \\ - & B & E & + \\ + & F & A & - \\ - & B & F & + \\ - & D & A & - \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & E & F \\ \hline \text{N} & \text{N} & \text{T} & \text{N} & \text{T} & \text{T} \\ \hline \end{array} \quad \text{što nije moguće.}$$

Učenici A i E su riješili zadatak.

4.



Kako je $|\sphericalangle AEM| = |\sphericalangle DEC|$ (vršni kutovi) i $|\sphericalangle EAM| = |\sphericalangle ECD|$ (kutovi s usporednim kracima), prema poučku K-K o sličnosti slijedi $\triangle AME \sim \triangle CDE$. Iz sličnosti slijedi $|DE| = 2|EM|$ i $|CE| = 2|AE|$.

Primjenom Pitagorina poučka imamo:

$$|AC|^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2^2 \quad \text{ili} \quad |AC| = 2\sqrt{3} \quad \text{ili} \quad |AE| = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

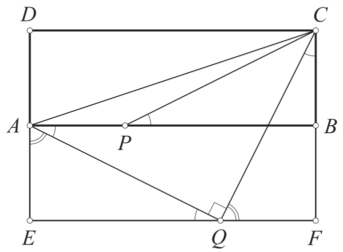
$$|DM|^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 = 6 \quad \text{ili} \quad |DM| = \sqrt{6} \quad \text{ili} \quad |EM| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

U trokutu $\triangle AME$ imamo:

$$|AM| = \sqrt{2}, \qquad |AE| = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \qquad |ME| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Budući da je $|AM|^2 = 2$ i $|AE|^2 + |ME|^2 = \frac{12}{9} + \frac{6}{9} = 2$, odnosno $|AM|^2 = |AE|^2 + |ME|^2$, prema obratu Pitagorina poučka trokut $\triangle AME$ je pravokutan pa je $|\sphericalangle MEA| = |\sphericalangle CED| = 90°$.

5. Dopunimo pravokutnik $ABCD$ sa sukladnim pravokutnikom kao na slici. Odaberimo na $\overline{EF}$ točku Q takvu da je $|EQ| = \frac{2}{3}|EF|$.



Označimo zbog jednostavnosti $|BC| = x$. Promotrimo sada pravokutne trokute AEQ i QFC. Kako je $|AE| = |QF| = x$ i $|EQ| = |CF| = 2x$, slijedi da su oni sukladni. Iz te sukladnosti slijedi

$$|AQ| = |QC| \tag{$*$}$$

te

$$|\sphericalangle EAQ| = |\sphericalangle CQF| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle EQA| = |\sphericalangle QCF|. \tag{$**$}$$

Sada je zbog $(*)$ i $(**)$ trokut AQC jednakokračan pravokutan.

Nadalje, kako je $|PB| = 2x$ i $|BC| = x$, slijedi da su pravokutni trokuti PBC i AEQ sukladni. Iz te sukladnosti slijedi da je $|\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle EQA|$. Kako su $\sphericalangle EQA$ i $\sphericalangle QAB$ kutovi uz presječnicu, slijedi da je $|\sphericalangle EQA| = |\sphericalangle QAB|$.

Konačno,

$$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle EQA| = |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle QAB| = |\sphericalangle QAC|.$$

Kako je trokut QAC jednakokračan pravokutan, slijedi da je $|\sphericalangle QAC| = 45°$ čime je dokaz završen.