MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola

Pula, 30. ožujka 2009.

1. Duljine visina trokuta odnose se kao $3 : 4 : 5$, a duljina najveće stranice tog trokuta je 12 cm. Koliki je opseg tog trokuta?

2. Dvije tvornice automobila proizvode dnevno ukupno manje od 18 automobila. Druga tvornica proizvodi dnevno manje od dvostruke dnevne proizvodnje prve tvornice. Kad bi prva tvornica povećala proizvodnju za dva automobila dnevno, a druga smanjila dnevnu proizvodnju također za dva automobila, druga bi tvornica proizvodila dnevno više automobila nego prva. Koliko automobila dnevno proizvodi prva, a koliko druga tvornica?

3. Odredi sve troznamenkaste brojeve s različitim znamenkama koji su djeljivi sa svakim od dvoznamenkastih brojeva koji se iz tog troznamenkastog broja dobiju izostavljanjem jedne njegove znamenke, bez promjene poretka preostalih znamenaka.

4. Konstruiraj pravokutni trokut ABC, s pravim kutom pri vrhu C, ako je $|AC| = 6$ cm i polumjer upisane kružnice trokuta $\varrho = 1.5$ cm.

5. Simetrala hipotenuze $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC odsijeca trokut čija je površina tri puta manja od površine trokuta ABC. Koliki su šiljasti kutovi zadanog trokuta?

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – rješenja

Pula, 30. ožujka 2009.

1. Neka su duljine stranica trokuta a, b i c, te duljine odgovarajućih visina v_a, v_b i v_c.
Kako je $v_a : v_b : v_c = 3 : 4 : 5$, slijedi da je $v_a = 3k$, $v_b = 4k$, $v_c = 5k$, $k \in \mathrm{Q}$.
Kako je površina trokuta jednaka polovini umnoška duljine stranice i duljine odgovarajuće visine, imamo da je

$$a = \frac{2P}{3k}, \qquad b = \frac{2P}{4k}, \qquad c = \frac{2P}{5k},$$

pri čemu P označava površinu trokuta. Zbog toga vrijedi razmjer $a : b : c = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$.
Svođenjem na zajednički nazivnik imamo da je $a : b : c = \frac{20}{60} : \frac{15}{60} : \frac{12}{60}$, odnosno $a : b : c = 20 : 15 : 12$.
Stoga je $a = 20l$, $b = 15l$, $c = 12l$, $l \in \mathrm{Q}$. Očito je a najdulja stranica, pa je $20l = 12$, odakle je $l = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.
Konačno, opseg trokuta je $o = a + b + c = 20l + 15l + 12l = 47l = 47 \cdot \frac{3}{5} = \frac{141}{5} = 28.2$ cm.
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka prva tvornica proizvodi dnevno x automobila, a druga y automobila. Prema uvjetu zadatka moraju vrijediti sljedeće tri nejednakosti:

$$x + y < 18, \quad y < 2x, \quad x + 2 < y - 2.$$

Zbrojimo li prvu i treću nejednakost dobivamo da je $x + y + x + 2 < 18 + y - 2$, odakle je $2x < 14$, tj. $x < 7$.
Druga i treća nejednakost daju $x + 4 < y < 2x$, odakle je $x + 4 < 2x$, pa je $x > 4$. Stoga je $x = 5$ ili $x = 6$.
Ako je $x = 5$, iz druge i treće nejednakosti dobivamo da istovremeno mora biti $y < 10$ i $y > 9$, što nije moguće.
Dakle, mora biti $x = 6$, odakle opet iz druge i treće nejednakosti dobivamo da je $y < 12$ i $y > 10$, pa je $y = 11$.
Neposrednom provjerom uočavamo kako $x = 6$ i $y = 11$ zadovoljavaju uvjete zadatka.
.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj koji zadovoljava uvjete zadatka.
Tada je $a \neq b \neq c$ i razlomci $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}}$, $\frac{\overline{abc}}{\overline{bc}}$, $\frac{\overline{abc}}{\overline{ac}}$ su cijeli brojevi.

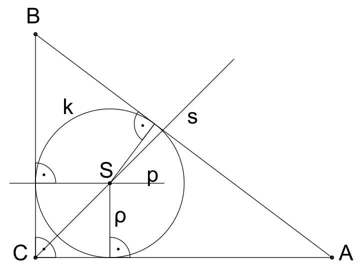
1° Kako je $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{ab0} + c}{\overline{ab}} = 10 + \frac{c}{\overline{ab}}$, slijedi da je $\frac{c}{\overline{ab}}$ cijeli broj, a to je moguće samo ako je $c = 0$.

2° Sada imamo da je $\frac{\overline{ab0}}{\overline{a0}} = \frac{\overline{ab}}{a} = \frac{10a + b}{a} = 10 + \frac{b}{a}$, pa b mora biti višekratnik od a.
Kako je $a \neq b$, slijedi da znamenka a može poprimiti vrijednosti iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$.

3° Nadalje, $\frac{\overline{ab0}}{\overline{b0}} = \frac{\overline{ab}}{b} = \frac{10a + b}{b} = 1 + \frac{10a}{b}$, pa b mora biti djelitelj od $10a$.

Konačno, kombiniranjem uvjeta 2° i 3° dobivamo pet rješenja: 120, 150, 240, 360, 480.
.... UKUPNO 10 BODOVA

4. ANALIZA



Središte S upisane kružnice je presjek simetrale s kuta γ i pravca p usporednog s $\overline{AC}$ i udaljenog od $\overline{AC}$ za ϱ. Vrh B je presjek tangente iz točke A na upisanu kružnicu k i okomice na $\overline{AC}$ u točki C.

KONSTRUKCIJA

1° Konstruirati pravi kut γ s vrhom C i krakovima m i l.

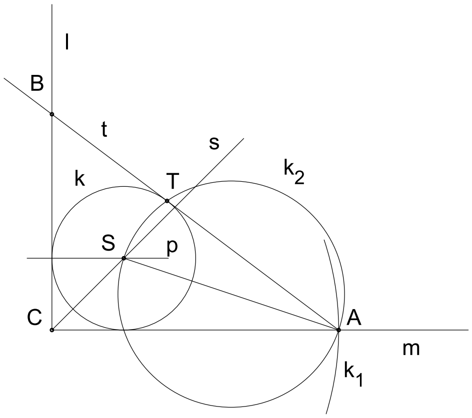
2° Konstruirati simetralu s kuta γ.

3° Konstruirati dužinu $\overline{AC}$, pri čemu je točka A sjecište kraka m i kružnice $k_1(C, b)$.

4° Konstruirati pravac p usporedan s $\overline{AC}$ i udaljen od $\overline{AC}$ za ϱ. Sjecište pravaca s i p je središte S trokutu upisane kružnice.

5° Konstruirati upisanu kružnicu $k(S, \varrho)$.

6° Konstruirati kružnicu k_2 nad promjerom $\overline{SA}$. Neka je T sjecište kružnica k i k_2, koje ne pripada kraku m. Kako je $\sphericalangle ATS$ obodni kut nad promjerom kružnice k_2, to je $\sphericalangle ATS = 90°$, pa je pravac $t = AT$ tangenta kružnice k. Sjecište tangente t i kraka l određuje vrh B trokuta ABC.

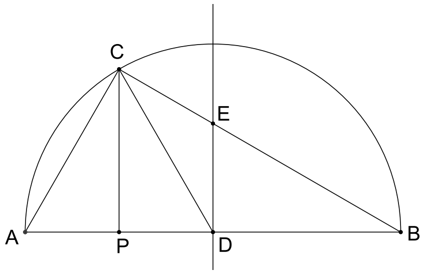


RASPRAVA

Zadatak ima jedinstveno rješenje.

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka je D polovište hipotenuze $\overline{AB}$, neka je P nožište visine iz vrha C te neka je E sjecište simetrale hipotenuze sa stranicom $\overline{BC}$.



Kako je površina trokuta DBE tri puta manja od površine trokuta ABC i budući je $|DB| = \dfrac{|AB|}{2}$, slijedi jednakost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|}{2} \cdot |ED| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot |CP|,$$

odakle dobivamo razmjer

$$\frac{|CP|}{|ED|} = \frac{3}{2}.$$

Nadalje, iz sličnosti trokuta DBE i PBC dobivamo da je

$$\frac{|BP|}{|BD|} = \frac{|CP|}{|ED|} = \frac{3}{2}.$$

Zbog toga je $|BP| = \dfrac{3}{2}|BD| = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{|AB|}{2} = \dfrac{3}{4}|AB|$, pa je $|AP| = |AB| - |BP| = \dfrac{1}{4}|AB|$. Stoga je i $|PD| = \dfrac{1}{4}|AB|$.

Prema tome, točka P je polovište dužine $\overline{AD}$, pa je trokut ADC jednakokračan, tj. $|AC| = |DC|$.

No, točka D je središte opisane kružnice pravokutnog trokuta ABC, pa je $|AD| = |DC|$.

Dakle, trokut ADC je jednakostraničan, pa je $\sphericalangle CAB = 60°$.

Konačno, kako je zbroj kutova u trokutu jednak $180°$, lagano dobivamo da je $\sphericalangle ABC = 30°$.

. . . . UKUPNO 10 BODOVA