MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

DRŽAVNO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

Pula, 30. ožujka 2009.

1. Odredi sve uređene parove (x, y) prirodnih brojeva takvih da je
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy + x + y}.$$

2. Dokaži da je razlika kvadrata bilo koja dva neparna broja djeljiva s 8.

3. Na ploči se nalaze svi šesteroznamenkasti brojevi sastavljeni od znamenaka $1, 2, 3, 4, 5, 6$, pri čemu se u brojevima svaka znamenka pojavljuje točno jedanput. Brojevi su napisani u rastućem poretku, odnosno od manjeg prema većem. Koji se broj nalazi na petstotom mjestu?

4. U trokutu ABC je $|BC| = 6$ cm, $|CA| = 8$ cm i $\sphericalangle ABC - \sphericalangle CAB = 90°$. Izračunaj duljinu visine trokuta iz vrha C.

5. Na stranici $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta ABC dana je bilo koja točka M. Neka su P i Q redom nožišta okomica spuštenih iz točke M na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Nadalje, neka su P_1 i Q_1 redom nožišta okomica spuštenih iz točaka P i Q na stranicu $\overline{AB}$. Dokaži da je
$$|P_1Q_1| = \frac{3}{4}|AB|.$$

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
8. razred – rješenja
Pula, 30. ožujka 2009.

1. Kvadriranjem zadane jednakosti dobivamo da je

$$x + y + 2\sqrt{xy} = xy + x + y,$$

odakle je $2\sqrt{xy} = xy$, odnosno, nakon ponovnog kvadriranja, $4xy = x^2y^2$. Odatle je

$$x^2y^2 - 4xy = xy(xy - 4) = 0.$$

Sada, kako su x i y prirodni brojevi, slijedi da je $xy - 4 = 0$, tj. $xy = 4$. Konačno, kako su x i y prirodni brojevi čiji je umnožak jednak 4, dobivamo tri uređena para koji zadovoljavaju uvjete zadatka: $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$.

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka su a i b neparni brojevi. Tada ih možemo prikazati u obliku $a = 2m + 1$ i $b = 2n + 1$, pri čemu su m i n cijeli brojevi. Sada je

$$a^2 - b^2 = (2m + 1)^2 - (2n + 1)^2 = (4m^2 + 4m + 1) - (4n^2 + 4n + 1) = 4(m^2 + m - n^2 - n),$$

odakle odmah slijedi da je razlika kvadrata djeljiva s 4.
Preostaje još dokazati da je broj $m^2 + m - n^2 - n$ paran, tj. djeljiv s 2. Naime, taj broj možemo zapisati u obliku $m^2 + m - n^2 - n = m(m + 1) - n(n + 1)$.
Sada, brojevi $m(m + 1)$ i $n(n + 1)$ su umnošci dvaju uzastopnih cijelih brojeva, pa su oni parni.
Stoga je i njihova razlika paran broj, odakle slijedi da je broj $m^2 + m - n^2 - n$ djeljiv s 2.
Dakle, razlika kvadrata dvaju neparnih brojeva je djeljiva s $4 \cdot 2 = 8$, što je i trebalo dokazati.

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Pogledajmo prvo koliko ima šesteroznamenkastih brojeva koji počinju s izabranom znamenkom $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\underline{a}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_.$$

Njih ima $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, zato jer za svaku iduću znamenku imamo jednu mogućnost manje.
Kako je $4 \cdot 120 = 480 < 500$ i $5 \cdot 120 = 600 > 500$, slijedi da je $a = 5$, pa traženi broj počinje znamenkom 5.
Promatramo sada brojeve

$$\underline{5}\ \underline{b}\ \_\ \_\ \_\ \_,$$

pri čemu je $b \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ izabrana znamenka. Takvih brojeva ima $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Sada, kako je $480 + 24 = 504 > 500$, mora biti $b = 1$.
Postupak nastavljamo dalje. Promatramo brojeve

$$\underline{5}\ \underline{1}\ \underline{c}\ \_\ \_\ \_,$$

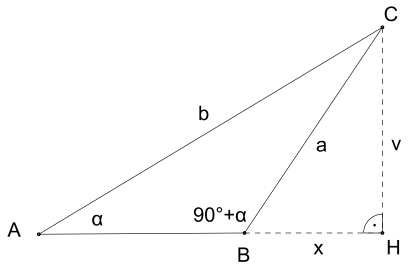
pri čemu je $c \in \{2, 3, 4, 6\}$ izabrana znamenka. Takvih brojeva ima $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
Kako je $480 + 3 \cdot 6 = 498 < 500$ i $480 + 4 \cdot 6 = 504 > 500$, slijedi da je $c = 6$.
Nadalje, promatramo brojeve

$$\underline{5}\ \underline{1}\ \underline{6}\ \underline{d}\ \_\ \_,$$

pri čemu je $d \in \{2, 3, 4\}$. Za izabranu znamenku d, tih brojeva ima $2 \cdot 1 = 2$.
Konačno, kako je $480 + 3 \cdot 6 + 2 = 500$, mora biti $d = 2$. Štoviše, kako je $480 + 3 \cdot 6 + 2 = 500$, traženi broj mora biti najveći broj oblika $\overline{5162ef}$ iz promatranog skupa brojeva, pa je $e = 4$, $f = 3$.
Dakle, na petstotom mjestu se nalazi broj 516243.

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. *Prvi način:* Uvedimo oznake $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$.
Prema uvjetu zadatka je $\beta = 90° + \alpha$, pa je zadani trokut tupokutan.
Neka je H nožište visine iz vrha C, te neka je $|CH| = v$ i $|BH| = x$.



Pokažimo sada da su pravokutni trokuti AHC i BHC slični. Naime, očito je
$\sphericalangle CBH = 180° - (90° + \alpha) = 90° - \alpha$, odakle je $\sphericalangle HCB = 90° - (90° - \alpha) = \alpha = \sphericalangle CAH$.
Dakle, pravokutni trokuti AHC i BHC imaju jednak šiljasti kut. Stoga im je jednak i drugi šiljasti kut, pa su oni slični. Iz dokazane sličnosti, uz istaknute oznake, vrijedi razmjer $\frac{b}{v} = \frac{a}{x}$, odakle je $x = \frac{av}{b}$.
S druge strane, primjenom Pitagorinog poučka na trokut BHC slijedi jednakost $x^2 + v^2 = a^2$.
Uvrstimo li u tu jednakost dobiveni izraz za x, imamo da je

$$\frac{a^2v^2}{b^2} + v^2 = a^2, \quad \text{tj.} \quad \frac{a^2v^2 + b^2v^2}{b^2} = a^2,$$

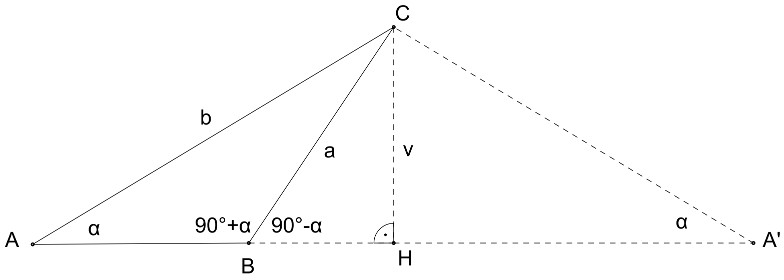
odakle je

$$v^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}, \quad \text{tj.} \quad v = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Konačno, kako je $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, imamo da je

$$v = \frac{6 \cdot 8}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{48}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{48}{\sqrt{100}} = \frac{48}{10} = 4.8 \text{ cm}.$$

Drugi način: U ovom rješenju koristimo iste oznake kao i u prvom rješenju.
Neka je A' centralno simetrična slika točke A u odnosu na točku H.



Tada je trokut $AA'C$ jednakokračan pa je $|A'C| = b$ i $\sphericalangle BA'C = \alpha$.
Uočimo da je trokut $BA'C$ pravokutan zato jer je $\sphericalangle A'CB = 180° - (90° - \alpha + \alpha) = 90°$.
Dakle, visina $\overline{CH}$ trokuta ABC podudara se s visinom pravokutnog trokuta $BA'C$. Izrazimo li površinu pravokutnog trokuta $BA'C$ na dva načina, dobivamo jednakost

$$\frac{ab}{2} = \frac{|BA'|v}{2}.$$

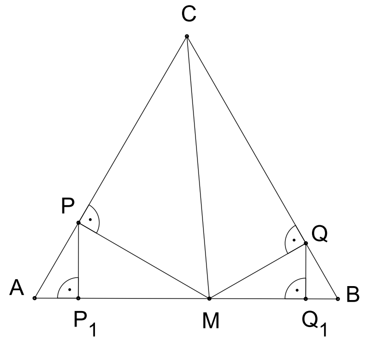
Sada, prema Pitagorinom poučku je $|BA'| = \sqrt{a^2 + b^2}$, pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo da je

$$v = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

odakle kao i u prvom rješenju dobivamo da je $v = 4.8$ cm.

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka je duljina stranice trokuta ABC jednaka a.



Kako je površina trokuta ABC jednaka zbroju površina trokuta AMC i MBC, slijedi da je

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a \cdot |MP|}{2} + \frac{a \cdot |MQ|}{2},$$

odakle je

$$|MP| + |MQ| = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \tag{1}$$

Pravokutni trokut P_1MP ima šiljaste kutove od $30°$ i $60°$, pa je on polovina jednakostraničnog trokuta. Zbog toga je $\overline{P_1M}$ visina jednakostraničnog trokuta sa stranicom $\overline{PM}$, pa je

$$|P_1M| = \frac{|PM|\sqrt{3}}{2}.$$

Slično, pravokutni trokut MQ_1Q je polovina jednakostraničnog trokuta, pa je

$$|MQ_1| = \frac{|MQ|\sqrt{3}}{2}.$$

Stoga, zbog jednakosti (1) vrijedi

$$\begin{aligned} |P_1Q_1| &= |P_1M| + |MQ_1| = \frac{|PM|\sqrt{3}}{2} + \frac{|MQ|\sqrt{3}}{2} \\ &= (|PM| + |MQ|)\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4} = \frac{3}{4}|AB|. \end{aligned}$$

. . . . UKUPNO 10 BODOVA