ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
6. razred – rješenja
23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Niko je prvog dana pretrčao $\frac{13}{3}$ km. 1 BOD

Drugog dana je pretrčao $\frac{13}{3}+1\frac{3}{5}=\frac{13}{3}+\frac{8}{5}=\frac{13\cdot 5+8\cdot 3}{15}=\frac{89}{15}$ km. 2 BODA

Trećeg dana Niko je pretrčao $\frac{89}{15}-\frac{4}{15}=\frac{85}{15}=\frac{17}{3}$ km. 2 BODA

Četvrtog dana je pretrčao $\frac{13}{3}+\frac{17}{3}-5=\frac{30}{3}-5=10-5=5$ km. 2 BODA

Dakle, Niko je ukupno pretrčao $\frac{13}{3}+\frac{89}{15}+\frac{17}{3}+5=15+\frac{89}{15}=\frac{225+89}{15}=\frac{314}{15}=20\frac{14}{15}$ km. 3 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Ako s x označimo ukupan broj kuglica, tada je $\frac{3}{7}x$ žutih i $\frac{4}{7}x$ plavih. 2 BODA

Ukoliko Martin dobije dvije žute kuglice te izgubi šest plavih kuglica, on ima jednak broj žutih i plavih kuglica, pa vrijedi jednadžba $\frac{3}{7}x+2=\frac{4}{7}x-6$. 3 BODA

Dalje je $\frac{4}{7}x-\frac{3}{7}x=2+6$, tj. $\frac{1}{7}x=8$, odakle je $x=56$. 3 BODA

Prema tome, Martin je na početku imao $\frac{3}{7}\cdot 56=24$ žute i $\frac{4}{7}\cdot 56=32$ plave kuglice. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj za koji je $a+b+c=18$. Ako je broj djeljiv s 18, onda je djeljiv s 2 i 9. Očito, svaki takav broj $\overline{abc}$ je djeljiv s 9, pa mora biti paran, tj. $c\in\{0,2,4,6,8\}$. 1 BOD

Ako je $c=0$, onda je $a+b=18$, odakle dobivamo broj 990. 1 BOD

Ako je $c=2$, onda je $a+b=16$, odakle dobivamo brojeve 972, 882, 792. 1 BOD

Ako je $c=4$, onda je $a+b=14$, odakle dobivamo brojeve 954, 864, 774, 684, 594. 2 BODA

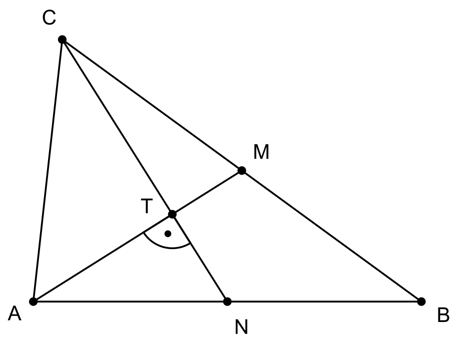
Ako je $c=6$, onda je $a+b=12$, odakle dobivamo brojeve 936, 846, 756, 666, 576, 486, 396. 2 BODA

Ako je $c=8$, onda je $a+b=10$, odakle dobivamo brojeve 918, 828, 738, 648, 558, 468, 378, 288, 198. 2 BODA

Dakle, ukupno je $1+3+5+7+9=25$ brojeva. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

Promotrimo trokute ANC i NBC. Oni imaju zajedničku visinu, povučenu iz vrha C. Nadalje, kako je N polovište stranice $\overline{AB}$, slijedi da je $|AN|=|NB|$. Dakle, trokuti ANC i NBC imaju jednake površine, pa je površina trokuta ABC dva puta veća od površine trokuta ANC tj. $P(ABC)=2P(ANC)$. 3 BODA

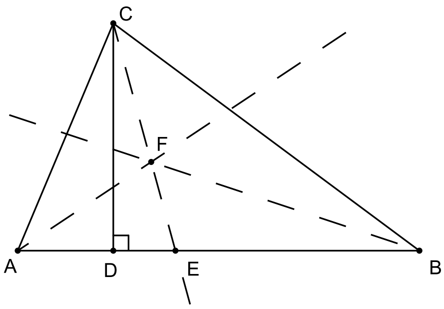
Nadalje, kako su dužine $\overline{AM}$ i $\overline{CN}$ okomite, slijedi da je $\overline{AT}$ visina trokuta ANC s obzirom na $\overline{CN}$. 2 BODA

Zbog toga je $P(ANC) = \dfrac{|CN| \cdot |AT|}{2} = \dfrac{3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ cm}^2$. 2 BODA

Konačno, za površinu trokuta ABC vrijedi $P(ABC) = 2P(ANC) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}^2$ 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka su α, β, γ redom kutovi pri vrhovima A, B, C. Nadalje, neka je D nožište visine iz vrha C, E sjecište simetrale kuta γ sa stranicom $\overline{AB}$, te neka je F sjecište simetrala kutova α i β.



1 BOD

Iz trokuta ABF imamo da je $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} + 120^\circ = 180^\circ$, tj. $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 60^\circ$. Zbog toga je $\alpha + \beta = 120^\circ$, pa je $\gamma = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. 3 BODA

Nadalje, kako je $\sphericalangle ECA = \dfrac{\gamma}{2} = 30^\circ$ slijedi da je $\sphericalangle DCA = \sphericalangle ECA - \sphericalangle ECD = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$, zato jer simetrala i visina iz vrha C zatvaraju kut od 10°. 2 BODA

Stoga, iz pravokutnog trokuta ADC imamo da je $\alpha = 180^\circ - (20^\circ + 90^\circ) = 70^\circ$. 2 BODA

Na kraju je $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA