ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
7. razred – rješenja
23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je α unutarnji te α' vanjski kut pravilnog mnogokuta. Znamo da je $\alpha + \alpha' = 180°$. 1 BOD
Prema uvjetu zadatka je $\alpha : \alpha' = 3 : 2$ pa je $\alpha = 3k$ i $\alpha' = 2k$. Stoga je $3k + 2k = 180°$,
tj. $5k = 180°$, odakle je $k = 36°$. Prema tome, $\alpha = 3k = 108°$. 3 BODA
S druge strane, kako je zbroj unutarnjih kutova $n-$terokuta jednak $(n-2) \cdot 180°$,
slijedi da je $\alpha = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$. 1 BOD
Prema tome, vrijedi jednadžba

$$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = 108°,$$

odakle je $\dfrac{n-2}{n} = \dfrac{108°}{180°} = \dfrac{3}{5}$, tj. redom $5(n-2) = 3n$, $2n = 10$, pa je $n = 5$. 3 BODA
Konačno, broj dijagonala pravilnog peterokuta jednak je $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{5 \cdot 2}{2} = 5$. 2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Kako je $a + b = 100$, slijedi da je $8a + 3b = 3(a + b) + 5b = 3 \cdot 100 + 5b = 300 + 5b$. 5 BODOVA
Nadalje, prema uvjetu zadatka je $300 + 5b = 2009$, odakle je $5b = 1709$. 2 BODA
Očito ne postoji cijeli broj b takav da je $5b = 1709$, jer je lijeva strana posljednje jednakosti djeljiva s 5, a desna nije. 3 BODA
NAPOMENA: Učenik također može riješiti posljednju linearnu jednadžbu i zaključiti da njeno rješenje nije cijeli broj.
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. U ovom zadatku koristimo Gaussovu dosjetku. Izračunajmo prvo nazivnik razlomka na lijevoj strani jednadžbe. Imamo da je

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2006 + 2008 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 1003 + 1004) = 2 \cdot \frac{1004 \cdot 1005}{2} = 1004 \cdot 1005.$$

3 BODA

Izračunajmo sada brojnik razlomka na lijevoj strani, služeći se prethodnim rezultatom. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + 2007 + 2009 &= (1 + 2 + 3 + \cdots + 2007 + 2008 + 2009) - (2 + 4 + 6 + \cdots + 2006 + 2008) \\ &= \frac{2009 \cdot 2010}{2} - 1004 \cdot 1005 = 2009 \cdot 1005 - 1004 \cdot 1005 \\ &= 1005 \cdot (2009 - 1004) = 1005 \cdot 1005. \end{aligned}$$

3 BODA

Prema tome, zadana jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$\frac{1005 \cdot 1005}{1004 \cdot 1005} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2008},$$

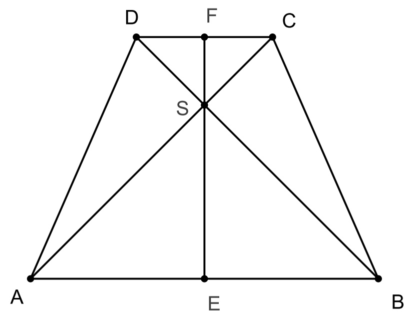
odakle je

$$\frac{1}{x} = \frac{1005}{1004} - \frac{1}{2008} = \frac{2010 - 1}{2008} = \frac{2009}{2008}.$$

3 BODA

Dakle, rješenje dane jednadžbe je $x = \dfrac{2008}{2009}$. 1 BOD
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Uvedimo oznake kao na slici:



1 BOD

Kako je trapez $ABCD$ jednakokračan, slijedi da je $|BC| = |AD|$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAB$. Nadalje, očito je $\overline{AB}$ zajednička stranica trokuta ABC i ABD, pa su oni sukladni prema poučku $S-K-S$. 2 BODA

Iz te sukladnosti slijedi da je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABD$, tj. $\sphericalangle SAB = \sphericalangle ABS$. Prema tome, trokut ABS je jednakokračan pravokutan pa je $\sphericalangle SAB = 45°$. 2 BODA

Sada, neka je $\overline{EF}$ visina trapeza $ABCD$ koja sadrži točku S, te neka je $v_1 = |ES|$ i $v_2 = |SF|$. Dakle, $\sphericalangle SAE = 45°$, $\sphericalangle AES = 90°$, pa je trokut AES jednakokračan pravokutan, što znači da je $|AE| = |ES|$. Kako je $\overline{ES}$ visina jednakokračnog trokuta ABS, slijedi da je $|AE| = |EB| = \frac{a}{2}$. To znači da je $\frac{a}{2} = v_1$. 2 BODA

Analogno je $\frac{c}{2} = v_2$, pa je $v = v_1 + v_2 = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+c}{2}$. 1 BOD

Zbog toga je površina trapeza $P(ABCD) = \frac{a+c}{2} \cdot v = v \cdot v = 28 \cdot 28 = 784 \text{ mm}^2$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Na kuglicama su brojevi $b \leq 10000$. Prebrojat ćemo jednoznamenkaste, dvoznamenkaste, troznamenkaste, četveroznamenkaste i peteroznamenkaste brojeve koji zadovoljavaju uvjete zadataka.

1. Ako je $1 \leq b \leq 9$, onda samo broj 5 zadovoljava uvjete, pa imamo 1 jednoznamenkasti broj. 1 BOD
2. Ako je $10 \leq b \leq 99$ onda je $b = \overline{x0}$ ili $b = \overline{x5}$. Kako je $x \neq 0$ i budući da su znamenke brojeva različite, brojeva prve vrste ima 9, a druge 8, pa imamo ukupno 17 dvoznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka. 2 BODA
3. Ako je $100 \leq b \leq 999$ onda je $b = \overline{xy0}$ ili $b = \overline{xy5}$. Brojeva prve vrste ima $9 \cdot 8 = 72$ zato jer znamenku stotica možemo odabrati na 9, a znamenku desetica na 8 načina. Nadalje, brojeva druge vrste ima $8 \cdot 8 = 64$ zato jer znamenku stotica možemo odabrati na 8 načina (sve osim 0 i 5), a znamenku desetica opet na 8 načina (sve osim 5 i odabrane znamenke stotica). Dakle, ukupno je $72 + 64 = 136$ troznamenkastih brojeva. 2 BODA
4. Ako je $1000 \leq b \leq 9999$, onda je $b = \overline{xyz0}$ ili $b = \overline{xyz5}$. Sličnim zaključivanjem kao u prethodnom slučaju zaključujemo kako brojeva prve vrste ima $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$, a druge $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ (opet prvo biramo tisućice, stotice pa desetice). Dakle, četveroznamenkastih brojeva ima $504 + 448 = 952$. 2 BODA
5. Očito broj $b = 10000$ ne zadovoljava uvjete zadatka.

Prema tome, imamo $1 + 17 + 136 + 952 = 1106$ povoljnih događaja. Konačno, kako je je broj mogućih događaja 10000, slijedi da je tražena vjerojatnost

$$p = \frac{1106}{10000} = 0.1106 = 11.06\%.$$

3 BODA

NAPOMENA: Ukoliko je učenik točno riješio zadatak, dobiva sve bodove bilo da vjerojatnost napiše u obliku razlomka, decimalnog broja ili postotka.

.... UKUPNO 10 BODOVA