ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
8. razred – rješenja
23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Uočimo kako u nazivnicima imamo redom kvadrat zbroja i kvadrat razlike. Zbog toga, za $x = 1 - \sqrt{2}$ dobivamo:

$$\frac{1}{x^2+2x+1} - \frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(2-\sqrt{2})^2} - \frac{1}{(-\sqrt{2})^2} = \frac{1}{6-4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}.$$

5 BODOVA

Nadalje, racionalizacijom nazivnika u prvom razlomku lagano dobivamo traženu vrijednost:

$$\frac{1}{6-4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6-4\sqrt{2}} \cdot \frac{6+4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{36-(4\sqrt{2})^2} - \frac{1}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{36-32} - \frac{1}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}-2}{4} = \frac{4+4\sqrt{2}}{4} = 1+\sqrt{2}.$$

5 BODOVA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Transformirajmo ponajprije zadanu jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 = 0$.
Primjenom formula za kvadrat zbroja i razlike imamo redom:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 &= x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + z^2 - 6z + 9 - 9 + 14 \\ &= (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 1 - 4 - 9 + 14 \\ &= (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2, \end{aligned}$$

pa je dana jednadžba ekvivalentna jednadžbi $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 0$. 5 BODOVA

Kako je zbroj kvadrata triju brojeva jednak nuli, zaključujemo da su svi oni jednaki nuli.

Preciznije, $x - 1 = 0$, $y + 2 = 0$, $z - 3 = 0$, odakle je $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$. 3 BODA

Zbog toga je $x + y + z = 1 - 2 + 3 = 2$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka su a, b, c redom broj smeđih, bijelih i crnih pločica u predvorju, te a_1, b_1, c_1 na terasi.
Nadalje, neka je d širina pločice u predvorju.

Tada je $2d$ duljina pločice u predvorju, d širina pločice na terasi i $\frac{4}{5}d$ duljina pločice na terasi. 1 BOD

Također je $b = 7c$, $b_1 = 7c_1$, $a = 6b$, $a_1 = 6b_1$. 1 BOD

Ukupan broj pločica u predvorju je $a + b + c = 6b + b + c = 7b + c = 7 \cdot 7c + c = 50c$,
a površina jedne pločice u predvorju je $d \cdot 2d = 2d^2$, pa vrijedi
$(50c) \cdot (2d^2) = 800 \cdot 1500$ cm^2, odnosno $c \cdot d \cdot d = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3$. 1 BOD

Kako je $d \in \mathbf{N}$, imamo sljedeću tablicu:

c	12000	3000	750	480	120	30
d	1	2	4	5	10	20

S obzirom da je $80 < c < 160$, vrijedi $c = 120$ cm, $d = 10$ cm. 2 BODA

Dalje je $c_1 = \frac{3}{4}c = 90$, $b_1 = 7c_1 = 630$, $a_1 = 6b_1 = 3780$,
pa je ukupan broj pločica na terasi $a_1 + b_1 + c_1 = 4500$. 2 BODA

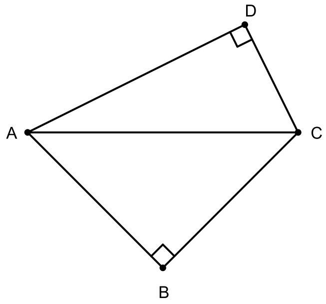
Površina jedne pločice na terasi je $d \cdot \frac{4}{5}d = 80$ cm^2. 1 BOD

Konačno, neka je t duljina terase. Tada je $t^2 = 4500 \cdot 80 = 360000$, odakle je $t = 600$ cm.

Dakle, duljina terase je $t = 600$ cm, odnosno 6 m. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

Neka je $|AD| = b$, $|DC| = a$ i $|AB| = |BC| = x$. Primjenom Pitagorinog poučka na trokute ABC i ACD dobivamo:

$$a^2 + b^2 = |AC|^2 \qquad \text{i} \qquad 2x^2 = |AC|^2.$$

2 BODA

Izjednačavanjem tih dviju relacija dobivamo da je $a^2 + b^2 = 2x^2$. Nadalje, kako je $a + b = 12$, kvadriranjem dobivamo da je $a^2 + 2ab + b^2 = 144$, odakle je $a^2 + b^2 = 144 - 2ab$.
Zbog toga je $144 - 2ab = 2x^2$, odakle je $ab + x^2 = 72$. 3 BODA
S druge strane, površina četverokuta $ABCD$ jednaka je zbroju površina dvaju pravokutnih trokuta ABC i ACD, pa je

$$P(ABCD) = P(ACD) + P(ABC) = \frac{ab}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{ab + x^2}{2}.$$

2 BODA

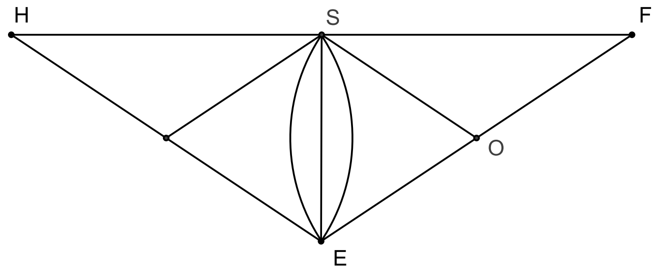
Konačno, iz dobivenih formula slijedi

$$P(ABCD) = \frac{ab + x^2}{2} = \frac{72}{2} = 36 \text{ cm}^2.$$

2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Kako je trokut EFS pravokutan, prema obratu Talesovog poučka, točka S se nalazi na kružnici s promjerom $\overline{EF}$. Analogno je točka S na kružnici s promjerom $\overline{HE}$. 1 BOD
Neka je točka O polovište dužine $\overline{EF}$. Očito, točka O je središte kružnice s promjerom $\overline{EF}$ te je $|OS| = |OE| = |OF|$. 1 BOD
Primjenom Pitagorinog poučka na trokut EFS slijedi da je
$|EF|^2 = |ES|^2 + |FS|^2 = (\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 6 + 18 = 24$, odakle je $|EF| = 2\sqrt{6}$. 1 BOD
Zbog toga je $|OS| = |OE| = \sqrt{6}$. Kako je $|ES| = \sqrt{6}$, slijedi da je trokut OSE jednakostraničan, pa je $\sphericalangle EOS = 60°$. 1 BOD
Površina P_1 kružnog isječka sa središnjim kutom $\sphericalangle EOS$ je $P_1 = \frac{1}{6} \cdot (\sqrt{6})^2\pi = \pi$,
a površina P_2 jednakostraničnog trokuta OSE je $P_2 = \frac{(\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. 2 BODA
Zbog simetričnosti s obzirom na pravac p, za traženu površinu P vrijedi $P = 2(P_1 - P_2)$.
Dakle, vrijedi $P = 2\left(\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) = 2\pi - 3\sqrt{3}$. 3 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA